Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieurs de Sfax

Devoir de Synthèse N°1 - Épreuve de Mathématiques II

Année universitaire : 2022 - 2023

Durée : 2 heures - Date : Janvier 2023 - Nbre de pages : 2

Étude des morphismes de la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Notations et rappels

Dans tout ce problème, $\mathbb{C}$ désigne le corps des nombres complexes et n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Si $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients complexes, à n lignes et p colonnes. Si $p = n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ est noté simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, c'est l'algèbre des matrices carrées d'ordre n a coefficients complexes; la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est notée I_n .
Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note χ_A sont polynôme caractéristique ; on rappelle qu'il est défini par :

$$\forall x \in \mathbb{C}, \quad \chi_A(x) = \det(xI_n - A).$$

Si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{L}(E)$ désigne le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des endomorphismes de E.
Si $u, v \in \mathcal{L}(E)$, $u \circ v$ se note uv et l'identité est notée id_E. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, les endomorphismes itérés u^p de u sont définis par les relations $u^0 = id_E$ et $u^p = uu^{p-1}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.
On pose $w = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et on considère dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ les deux matrices, notées C_n et D_n, définies par :

$$C_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & w^{n-1} \end{pmatrix}$$

1ère Partie
Quelques résultats préliminaires sur les matrices C_n et D_n

1.1 Étude des matrices C_3 et D_3 .
On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

1.1.1 Écrire les matrices C_3 et D_3.

1.1.2 Vérifier que ${D_3}^3 = I_3 = {C_3}^3$ et que $D_3C_3 = jC_3D_3$.

1.1.3 Montrer que la famille (I_3, D_3, D_3^2) est libre et qu'elle engendre le sous-espace vectoriel des matrices diagonales de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

1.1.4 Calculer le polynôme caractéristique de C_3 . La matrice C_3 est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

1.2 Étude préliminaire sur les matrices C_n et D_n dans le cas général

1.2.1 Vérifier que ${D_n}^n = I_n$.

1.2.2 Montrer que $D_nC_n = w\, C_nD_n$.

1.2.3 Montrer que la famille $(I_n, D_n, \dots, {D_n}^{n-1})$ est libre et qu'elle engendre le sous-espace vectoriel des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1.2.4 Calculer le polynôme caractéristique de C_n. La matrice C_n est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

1.2.5 Justifier que ${C_n}^n = I_n$.

1.3 Une base de $M_n(\mathbb{C})$ construite a partir des matrices C_n et D_n
On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et u (resp. v) l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ canoniquement associé à la matrice C_n (resp. D_n).

1.3.1 Vérifier que $u(e_n) = e_1$ et que $u(e_k) = e_{k+1}$ pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$

1.3.2 Montrer que, pour tout $k \in \{1 \dots, n-1\}$, $u^k(e_1) = e_{k+1}$ et que $u^n(e_1) = e_1$.

1.3.3 Calculer u^n et en déduire que ${C_n}^n = I_n$.

1.3.4 Montrer que la famille $(id_E, u, \ldots, u^{n-1})$ est libre en déduire le polynôme minimal de la matrice C_n.

1.3.5 Vérifier que $vu = w.uv$ et que $v(e_k) = w^{k-1}.e_k$, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$.

1.3.6 Montrer que la famille $({C_n}^k {D_n}^\ell)_{0 \leq k, \ell \leqslant n-1}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. *On pourra raisonner en. terme d'endomorphismes.*

2ème Partie
Une question de réduction

Dans cette partie, E désigne un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n, et f, g deux endomorphismes de E tels que

$$f^n = g^n = id_E \text{ et } fg = w.gf.$$

2.1 Justifier que les endomorphisme f et g sont inversibles.

2.2 Montrer que les endomorphismes f et g sont diagonalisables et que leurs valeurs propres sont des racines n-ièmes de l'unité.

2.3 Étude des valeurs propres et des sous-espace propres de l'endomorphisme f .
Soit λ une valeur propre de f et $x_0 \in E$ un vecteur propre associé.

2.3.1 Montrer que $w\lambda$ est aussi une valeur propre de f. *On pourra calculer $f(g(x_0))$.*

2.3.2 En déduire que, pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}, w^k\lambda$ est une valeur propre de f.

2.3.3 Montrer que le spectre de f est l'ensemble de toutes les racines n-ièmes de l'unité.

2.3.4 Préciser la dimension de chaque sous-espace propre de f.

2.4 Une base de E, convenable pour les endomorphisme f et g .
On vient d'établir précédemment que le spectre de f, noté $\mathrm{Sp}(f)$, *vérifie :* $\mathrm{Sp}(f) = \{1, w, \ldots, w^{n-1}\}$.
Soit e un vecteur propre de f associé à la valeur propre 1.

2.4.1 Montrer que, pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, $f(g^k(e)) = w^k.g^k(e)$.

2.4.2 En déduire que $(e, g(e), \ldots, g^{n-1}(e))$ est une base de E, formée de vecteurs propres de f.

2.4.3 On note $\mathcal{B} = (e, g(e), \ldots, g^{n-1}(e))$ cette base de E. Vérifier que la matrice de f (resp. g) dans la base $\mathcal{B}$ est D_n (resp. C_n).

3ème Partie
Application à la détermination des endomorphismes de l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Soit $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ un morphisme d'algèbres, c'est-à-dire un endomorphisme du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $\Phi(I_n) = I_n$ et tel que :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(C)^2, \quad \Phi(AB) = \Phi(A)\Phi(B).$$

3.1 Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que pour entier naturel $p, \Phi(M^P) = \Phi(M)^P$.

3.2 Vérifier que les matrices $\Phi(D_n)$ et $\Phi(C_n)$ vérifient les relations

$$\Phi(D_n)^n = \Phi(C_n)^n = I_n \quad \text{ et } \Phi(D_n)\Phi(C_n) = w.\Phi(C_n)\Phi(D_n).$$

3.3 On note f_1 et g_1 les endomorphismes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ canoniquement associés aux matrices $\Phi(D_n)$ et $\Phi(C_n)$ respectivement.

3.3.1 Justifier que les endomorphismes f_1 et g_1 de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ vérifient les relations

$$f_1^n = g_1^n = id_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})} \quad \text{ et } \quad f_1 g_1 = w.g_1 f_1$$

3.3.2 Montrer qu'il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ dans laquelle la matrice de f_1 est D_n et celle de g_1 est C_n.

3.3.3 En déduire qu'il existe une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\Phi(D_n) = PD_nP^{-1}$ et $\Phi(C_n) = PC_nP^{-1}$.

3.4 Montrer que, pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \Phi(M) = PMP^{-1}$.

3.5 Vérifier que les applications ainsi trouvées sont bien des morphismes de la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

FIN DE L'ÉPREUVE