

**INSTITUT PREPARATOIRE
AUX ETUDES D'INGENIEURS
DE SFAX**

**Département de la Préparation
Mathématiques Physique
Section MP2**

Devoir de synthèse d'Algèbre MP2

Durée : 3 h Date : 06-05-2017 Nb pages : 4

- Dans tout le problème \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} , E est un \mathbb{K} -e.v de dimension $n > 0$ et H un hyperplan de E .
- On désigne par : E^* l'espace dual de E , $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E , $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E , $SL(E) = \{u \in \mathcal{L}(E); \det(u) = 1\}$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n et à coefficients dans \mathbb{K} , $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Pour tous $u, v \in \mathcal{L}(E)$, la composée $u \circ v$ est notée par uv .
- **Définitions :**

► Soit G un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$. On dit que G est engendré par une partie A de $GL(E)$ (ou A est une partie génératrice de G) si

$$G = \langle A \rangle := \{u \in G; \exists v_1, \dots, v_n \in A, u = v_1^{\epsilon_1} v_2^{\epsilon_2} \dots v_n^{\epsilon_n}, \epsilon_1, \dots, \epsilon_n \in \{-1, 1\}\}.$$

► Deux automorphismes u et v de E sont dits conjugués dans $GL(E)$, s'il existe $w \in GL(E)$ tel que $u = wvw^{-1}$.

Partie 1 : Exemples de sous-groupes de $(GL(E), \circ)$

1. Montrer que $(GL(E), \circ)$ est un groupe.
2. (a) Montrer que $SL(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$.
(b) Pour $n = 2$, déterminer les éléments d'ordre 2 du groupe $SL(E)$.
(c) Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \varphi : SL(E) \times \mathbb{K}^* &\longrightarrow GL(E) \\ (u, \lambda) &\longmapsto \lambda u \end{aligned}$$

est un isomorphisme de groupes.

3. Soit G un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$ tel que, $\forall u \in G, u^2 = id_E$.

- (a) Soit $u \in G$. Déterminer son polynôme minimal π_u . En déduire que $\{-1, 1\}$ est l'ensemble des valeurs propres de u et que u est diagonalisable.
- (b) Prouver que, $\forall (u, v) \in G^2$, $u \circ v = v \circ u$.
- (c) Soit $u \in G$ tel que u n'est pas une homothétie.
- (i) Montrer que $E = \bigoplus_{k=1}^p \ker(u - \lambda_k id_E)$, où $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les valeurs propres de u .
- (ii) Montrer que, $\forall v \in G$, $\forall k \in \mathbb{N}_p$, $\ker(u - \lambda_k id_E)$ est stable par v .
- (d) En déduire qu'il existe une base B de E telle que
- $$\forall (u, v) \in G^2, \text{Mat}(u, B) = \text{Mat}(v, B) : \text{matrice diagonale.}$$

Indication : Raisonner par récurrence sur n puis utiliser (c)(i) et (c)(ii).

- (e) Montrer que le cardinal maximal de G est 2^n .

Partie 2 : Dilatation et transvection

1. Soit $u \in GL(E)$ tel que $u|_H = id_H$.

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

- (a) $\det(u) = \lambda \neq 1$ (donc $u \notin SL(E)$).

- (b) u admet une valeur propre $\lambda \neq 1$ (donc une droite propre D pour λ) et u est diagonalisable.

- (c) $\text{Im}(u - id_E) \not\subseteq H$.

- (d) Dans une base convenable, u a pour matrice
- $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

On dit alors que u est une **dilatation, d'hyperplan H , de droite D et de rapport λ** . Notons qu'alors $D = \text{Im}(u - id_E)$ et que $H = \ker(u - id_E)$.

2. On suppose que l'hyperplan H est d'équation $f \in E^* \setminus \{\tilde{0}\}$ et soit $u \in GL(E) \setminus \{id_E\}$ tel que $u|_H = id_H$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

- (a) $\det(u) = 1$ (c'est-à-dire $u \in SL(E)$).

- (b) u n'est pas diagonalisable.

- (c) $\text{Im}(u - id_E) \subset H$.

- (d) Dans une base convenable, u a pour matrice
- $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & 1 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On dit alors que u est une **transvection d'hyperplan H , de droite**
 $D = \text{Im}(u - \text{id}_E) = \text{Vect}(a)$. On a : $D \subset H$.

3. Montrer que, $\forall x \in E$, $u(x) = x + f(x)a$.

Nous noterons $\tau(f, a)$ la transvection u d'hyperplan $H = \ker(f)$, de droite
 $D = \text{Vect}(a) \subset H$.

Partie 3 : Propriétés des transvections et des dilatations

1. Montrer que :

(a) $\tau^{-1}(f, a) = \tau(f, -a)$,

(b) $\tau(f, a)\tau(f, b) = \tau(f, a + b)$,

(c) $\forall v \in GL(E)$, $v\tau(f, a)v^{-1} = \tau(f \circ v^{-1}, u(a))$ est une transvection de droite $u(D)$
 et d'hyperplan $u(H)$.

2. Montrer que l'ensemble $\mathcal{T}(H)$ des transvections d'hyperplan $H = \ker(f)$ est un sous-
 groupe commutatif de $GL(E)$ isomorphe au groupe additif $(H, +)$.

3. Déterminer le polynôme minimal d'une transvection et d'une dilatation.

4. Montrer que :

(a) Deux transvections quelconques sont conjuguées dans $GL(E)$.

(b) Le conjugué dans $GL(E)$ d'une dilatation est une dilatation de même rapport.

(c) deux dilatations sont conjuguées dans $GL(E)$ si, et seulement si, elle ont même
 rapport.

(d) Si $n \geq 3$, alors deux dilatations sont conjuguées dans $SL(E)$.

Partie 4: Applications

1. **Première application : Centre de $GL(E)$.**

Pour tous G sous-groupe de $GL(E)$, on note $\mathcal{Z}(G) = \{u \in G; uv = vu, \forall v \in G\}$
 appelé le **centre de G** .

(a) Soit $u \in GL(E)$. On suppose que u laisse invariant toutes les droites vectorielles
 de E . Montrer que u est une homothétie.

(b) Soient $u \in \mathcal{Z}(GL(E))$ et τ une transvection de droite D . Montrer que $u\tau u^{-1}$
 est une transvection de droite $u(D)$.

(c) En déduire que :

(i) $\mathcal{Z}(GL(E))$ est formé par des homothéties isomorphe à \mathbb{K}^* .

(ii) $\mathcal{Z}(SL(E))$ est formé par des homothéties isomorphe à $\{\lambda \in \mathbb{K}; \lambda^n = 1\}$.

(d) Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ et $GL_n(\mathbb{C})$ ne sont pas isomorphes.

2. **Deuxième application : Les générateurs de $GL(E)$ et de $SL(E)$.**

On suppose que $n \geq 2$.

(a) Soient H_1, H_2 deux hyperplans de E distincts et $a \in E \setminus (H_1 \cup H_2)$.

- (i) Montrer que $H = (H_1 \cap H_2) \oplus \text{Vect}(a)$ est un hyperplan de E
 - (ii) Montrer que $E = H + H_1 = H + H_2$.
 - (iii) Montrer qu'il existe une transvection u telle que $u(a) = a$ et $u(H_1) = H_2$
Indication : pour $a_2 \in H_2 \setminus H$, on justifiera l'existence de $a_1 \in H_1 \setminus H$ et $b \in H$ tels que $a_2 = a_1 + b$, puis on peut considérer la transvection $\tau(\phi, b)$, où $H = \ker(\phi)$ telle que $\phi(a_1) = 1$.
- (b) Soient x et y deux vecteurs non nuls dans E . Montrer qu'il existe une transvection u ou un produit de deux transvections uv telles que $u(x) = y$ ou $uv(x) = y$.
- (c) Dédurre que :
- (i) Les transvections engendrent $SL(E)$.
 - (ii) Les transvections et les dilatations engendrent $GL(E)$.