Epreuve de Mathématiques I

Durée: 2 heures.

Exercice.

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^\alpha}$ où $0 \leq \alpha < 1$.

1) Montrer que pour tout $s > 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} u^{s-1}e^{-u}\,du$ est convergente.

On désigne par $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} u^{s-1}e^{-u}\,du$.

2) Soit $x \in]0,1[$. Posons $\Phi_x(t) = \frac{x^t}{t^\alpha} = \frac{1}{t^\alpha}\, e^{t\log x}$.

a) Vérifier que Φ_x est décroissante sur $]0,+\infty[$.
b) Montrer que Φ_x est intégrable sur $]0,+\infty[$.
c) Justifier que

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^t}{t^\alpha}\,dt \leq \frac{1}{1-\alpha}$$

d) Montrer par un changement de variable que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\,dt = \Gamma(1-\alpha)\cdot(-\log x)^{\alpha-1}$$

3) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^\alpha}$ converge simplement sur $[0,1[$.

4) Prouver que pour tout $x \in]0,1[$,

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\,dt \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha} \leq \int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\,dt$$

5) En déduire que: $\lim_{x\to 1} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}\right) = +\infty$.

6) Montrer en utilisant ce qui précède qu'au voisinage de 1^-,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha} \sim \frac{\Gamma(1-\alpha)}{(1-x)^{1-\alpha}}.$$

Problème.

On considère un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$. On dit qu'une suite (X_n) d'éléments de E est de Cauchy si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que:

$$\text{pour tout} \quad (p,q) \in \mathbb{N}^2 \quad \text{vérifiant} \quad p > q > n_0 \quad \text{on a :} \quad \|X_p - X_q\| < \varepsilon.$$

Partie I.

1) Montrer que si (X_n) est convergente dans E alors (X_n) est de Cauchy dans E.
2) Montrer que si (X_n) est de Cauchy dans E alors (X_n) est bornée dans E.
3) Soient (X_n) une suite de Cauchy dans E et $\left(X_{\phi(n)}\right)$ une sous suite de (X_n) qui converge dans E vers un vecteur x de E. Montrer que (X_n) converge dans E vers x.
4) On se donne un compact K de E et une suite (X_n) de Cauchy d'éléments de K. Montrer que (X_n) converge dans K.
5) On suppose dans cette question que E est de dimension finie. Montrer qu'une suite (X_n) est de Cauchy dans E si et seulement si (X_n) est convergente dans E.

Partie II. (Exemple d'une suite de Cauchy qui n'est pas convergente)

Dans cette partie $E = \mathbb{R}[X]$ et $(S_n)_{n \geq 1}$ la suite d'éléments de $\mathbb{R}[X]$ définie par:

$$S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{X^k}{k}$$

Pour $a \in]0,1[$ on définit la norme $\|\cdot\|_a$ par $\|P\|_a = \sup\limits_{0 \leq t \leq a} |P(t)|$.

Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose

$$\|P\| = \max\{\left|\frac{P^{(k)}(0)}{k!}\right|, \quad k \in \mathbb{N}\}$$

1) Montrer que $\|\cdot\|$ définit une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
2) Prouver que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ $\quad \|P\|_a \leq \dfrac{1}{1-a}\|P\|$.
3)
   a) Evaluer $\|S_p - S_q\|$ pour $p > q \geq 1$.
   b) En déduire que (S_n) est de Cauchy dans $\left(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|\right)$.
4)
   a) Montrer que si (S_n) converge dans $\left(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|\right)$ vers un élément L, alors

$$\forall x \in [0,a], \qquad L(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

   b) En déduire que (S_n) n' est pas convergente dans $\left(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|\right)$.