

Devoir de Synthèse de Physique
SEMESTRE 1

MP2-PT2.
A.U : 2017-2018

Durée : 4H

Formulaire :

$$\vec{\text{rot}} \vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z.$$

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{A}) = \vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

Données utiles :

Masse d'un proton	$m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg} ;$
Masse d'un électron	$m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg} ;$
Charge élémentaire	$e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C} ;$
Permittivité diélectrique du vide	$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1} ;$
Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H m}^{-1} ;$
Célérité de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}.$

EXERCICE 1

On considère cylindre épais de longueur L , de rayon intérieur R et de rayon extérieur $R' = R + e$. Il est parcouru par un courant électrique de densité volumique $\vec{J} = J \vec{e}_\theta$ (J est uniforme et indépendant du temps). On néglige les effets de bords et on travaille dans la base cylindrique ($\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$).

Partie I. Champs à l'intérieur d'un cylindre infini en régime stationnaire.

1°/ En effectuant une étude de symétrie, montrer que $\vec{B}(M) = B(r) \vec{e}_z$.

2°/ Rappeler l'équation de Maxwell-Ampère en magnétostatique et déduire l'équation différentielle vérifiée par le champ $B(M)$ dans trois régions de l'espace qu'on précisera.

3°/ Le champ magnétique étant nul à l'extérieur du cylindre. Déterminer le champ $\vec{B}(M)$ en tout point de l'espace.

4°/ On étudie le cas limite où $e \rightarrow 0$. La distribution de courant est alors équivalente à celle d'un cylindre parcouru par un courant surfacique de densité $\vec{J}_s = J_s \vec{e}_\theta$. Exprimer J_s en fonction de J et e et montrer que l'expression du champ magnétique à l'intérieur du cylindre est : $\vec{B}(M) = \mu_0 J_s \vec{e}_z$.

Partie II. Champs à l'intérieur d'un cylindre infini en régime variable.

L'intensité de courant est désormais sinusoïdale de pulsation ω . La densité de courant surfacique en notation complexe s'écrit : $\vec{J}_s = J_{s\text{max}} \exp(i\omega t) \vec{e}_\theta$. Il existe alors non seulement un champ magnétique \vec{B} mais aussi un champ électrique \vec{E} . Dans la suite, le champ magnétique sur l'axe sera toujours écrit sous la forme $\vec{B}(r=0, t) = B_0 \exp(i\omega t)$. On admet en première approximation que l'on peut travailler dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires magnétiques.

Dans ce cas, le champ $\vec{B}(M,t)$ se calcule comme dans le cas de la magnétostatique mais le courant dépendant du temps. On notation complexe, on a : $\vec{B}(M,t) = \vec{B}_0(r) \exp(i\omega t)$ et $\vec{E}(M,t) = \vec{E}_0(r) \exp(i\omega t)$.

5°/ En faisant un raisonnement de symétrie, montrer que : $\vec{E}(M,t) = E(r,t) \vec{e}_\theta$.

6°/ Ecrire l'expression de $\vec{B}_0(r)$ pour $r < R$ et $r > R$ en fonction de B_0 . Donner B_0 en fonction de μ_0 et $J_{S\max}$.

7°/ Rappeler l'équation de Maxwell-Ampère et l'équation de Maxwell-Faraday.

8°/ Retrouver en partant de ces équations, les formes intégrales correspondantes : le théorème d'Ampère généralisé et la relation de Faraday.

9°/ Déterminer l'expression du champ électrique $\vec{E}_0(r)$ pour $r < R$ et $r > R$.

On se propose de corriger l'expression obtenue pour \vec{B} en posant :

$\vec{B}(M,t) = [\vec{B}_0(r) + \vec{B}_1(r)] \exp(i\omega t)$. Le terme correctif $\vec{B}_1(r)$ est choisi nul en $r = 0$.

10°/ Montrer que le terme correctif $\vec{B}_1(r)$ vérifie la relation : $\oint \vec{B}_1(r) \cdot d\vec{\ell} = \epsilon_0 \mu_0 i\omega \iint_S \vec{E}_0 \cdot d\vec{S}$.

11°/ Déterminer $\vec{B}_1(r)$ pour $r < R$ en utilisant la forme intégrale.

On suppose dans l'Approximation des Régimes Quasi Stationnaires (A.R.Q.S.) que les champs sont donnés par la première approximation. On admet que ceci est acceptable si le terme correctif de \vec{B} à l'intérieur du solénoïde est négligeable par rapport à l'expression obtenue pour \vec{B} à l'issue de la première étape.

12°/ Déterminer la condition à la quelle doit satisfaire l'A.R.Q.S.

13°/ Lorsque la condition de l'A.R.Q.S est satisfaite, donner l'expression de la densité volumique de l'énergie électromagnétique $u_{em}(r,t)$.

14°/ Quelle approximation faut-il effectuer dans l'expression de $u_{em}(r,t)$? En comparant l'expression de l'énergie emmagasinée par le cylindre au cas de la densité d'énergie d'une onde électromagnétique dans le vide progressive plane, harmonique de pulsation ω , lequel, préciser si le système à dominante électrique ou magnétique ?

15°/ Calculer le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}(r,t)$ décrivant le transfert de l'énergie à travers la surface du cylindre, toujours dans le cadre de l'A.R.Q.S.

16°/ Effectuer un bilan énergétique global sur la zone d'espace correspondant à l'intérieur du cylindre. Commenter.

Partie III. Effet Joule à l'intérieur du cylindre

On place à l'intérieur du cylindre étudié une barre métallique cylindrique d'axe Oz, de longueur $\ell < L$, de rayon $a < R$ et conductivité γ . On se placera dans l'ARQS.

17°/ Donner l'expression du champ électrique \vec{E}_i en un point M de la barre métallique situé à la distance r de l'axe Oz, en déduire la densité volumique de courant induit $\vec{J}_i(M)$.

18°/ Montrez que la puissance instantanée $dP(t)$ dissipée par effet joule dans un volume élémentaire $d\tau$ est : $dP(t) = \vec{J}_i \cdot \vec{E}_i d\tau$. Déduire la puissance moyenne $\langle P \rangle$ dissipée par effet joule dans la barre métallique.

19°/ Cet effet peut être exploité dans la pratique. Indiquez pour quelle utilisation et dites dans ce cas comment le rendre plus efficace.

20°/ Réaliser un bilan d'énergie sur la barre métallique et conclure.

EXERCICE 2

On étudie un condensateur plan supposé idéal, c'est-à-dire on néglige les effets de bord. Les armatures ont la forme d'un disque d'axe Oz , de rayon a et de surface S . Elles sont séparées d'une distance e . On repère un point M de l'espace limité par les armatures du condensateur par ses coordonnées cylindrique (r, θ, z) . On notera $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ la base correspondante. L'espace entre les armatures est défini par $0 < z < e$ et $0 < r < a$. Le milieu entre les armatures est assimilable au vide de permittivité électrique ϵ_0 et de perméabilité magnétique μ_0 .

Partie I. Condensateur en régime stationnaire

L'armature, située en $z = 0$, porte une charge positive Q de densité surfacique σ . L'autre armature porte une charge opposée.

1°/ Donner l'expression de la densité de charge surfacique σ .

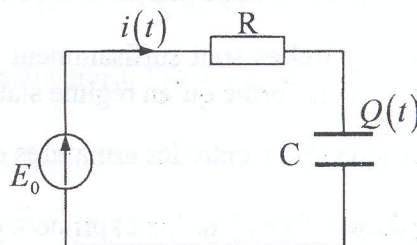
2°/ Montrer que le champ électrostatique entre les armatures du condensateur est : $\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z$.

3°/ Déduire la différence de potentiel U entre les armatures et exprimer la capacité C de ce condensateur en fonction de e , ϵ_0 et S .

4°/ Exprimer l'énergie potentielle U_e emmagasinée par le condensateur en fonction du champ électrostatique E , de S , e et de ϵ_0 .

Partie II. Condensateur en régime variable.

Le condensateur étant initialement déchargé. A l'aide d'un générateur idéal, de f.e.m. E_0 , on charge ce condensateur de capacité C . Le circuit comprend en plus une charge de résistance R .



5°/ Montrer que la loi de la variation de la charge $Q(t)$ du condensateur s'écrit :

$Q(t) = Q_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right)$. Expliciter Q_0 et τ en fonction de R , C et E_0 . Tracer l'allure de Q en fonction du temps t . Que représente τ et donner son unité.

6°/ Pendant la durée de la charge du condensateur, déterminer, en fonction de C et E_0 , l'énergie fournie par le générateur W_1 , l'énergie emmagasinée par le condensateur W_2 et l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance W_3 . Conclure.

7°/ On suppose que la charge $Q(t)$ varie lentement pour que l'expression du champ électrique, obtenue précédemment dans le cadre statique, reste valable. Déduire les expressions de la densité surfacique de charge $\sigma(t)$ et du champ électrique $\vec{E}(t)$ en fonction $E_0, e, \varepsilon_0, \tau$ et du temps t .

8°/ Pour déterminer le champ magnétique entre les armatures du condensateur, on étudie d'abord le dispositif suivant : un conducteur cylindrique supposé infini, d'axe Oz et de rayon a , est parcouru par un courant variable de densité $\vec{J}(M, t) = J(t)\vec{e}_z$. On se placera en régime lentement variable ou le courant de déplacement est négligeable devant le courant de conduction.

En utilisant l'équation de Maxwell-Ampère simplifiée, déterminer l'expression du champ magnétique $\vec{B}(M, t)$ en un point situé à l'intérieur du cylindre conducteur ($r \leq a$) en fonction de $J(t), \mu_0$ et r en d'un vecteur unitaire précisant la direction de $\vec{B}(M, t)$.

9°/ En exploitant ces résultats, montrer que le champ magnétique entre les armatures du condensateur s'écrit sous la forme :

$$\vec{B}(r, t) = \frac{E_0 r}{2e\tau c^2} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \vec{e}_\theta \quad \text{avec } c \text{ la célérité de la lumière dans la vide.}$$

10°/ On se propose d'établir le bilan d'énergie électromagnétique à l'intérieur d'un condensateur et décrire la validité de l'approximation des régimes quasi-stationnaire.

10.a°/ Rappeler la définition du vecteur de Poynting \vec{R} .

10.b°/ Montrer qu'à la limite de l'espace compris entre les armatures ($r = a$), le vecteur de

$$\text{Poynting s'écrit : } \vec{R}(r = a, t) = \frac{\varepsilon_0 U_0^2 a}{2e^2 \tau} \left(\exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right) - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right) \vec{e}_r$$

10.c°/ En déduire la puissance transférée P_r à travers la surface limitant le domaine compris entre les armatures du condensateur.

10.d°/ En exploitant le bilan de l'énergie électromagnétique, déterminer l'énergie électromagnétique reçue par ce domaine pendant la charge du condensateur (c-à-d entre l'instant initial ($t = 0$) et l'instant où $t \gg \tau$). Comparer ce résultat avec celui obtenu à la question 6°/.

11°/ Le condensateur précédent est maintenant relié à un générateur de tension idéal délivrant une f.e.m. sinusoïdale. L'une des armatures porte donc une charge variable en suivant une loi sinusoïdale : $Q(t) = Q_0 \cos(\omega t)$; ω est la pulsation de la tension appliquée.

On suppose que les variations temporelles sont suffisamment lentes pour que le champ électrique entre les armatures conserve une même forme qu'en régime stationnaire.

11.a°/ Exprimer le champ électrique $\vec{E}(t)$ entre les armatures en fonction de $Q_0, \omega, \varepsilon_0, a$ et t .

11.b°/ Déduire le champ magnétique $\vec{B}(r, t)$ qu'on exprimera en fonction Q_0, ω, μ_0, a, r et t .

11.c°/ Montrer que le rapport des densités volumiques moyennes des énergies magnétique et électrique s'écrit : $\frac{\langle u_m \rangle}{\langle u_e \rangle} = \frac{\omega^2 r^2}{4 c^2}$.

11.d°/ Quelle condition doit-on imposer au rapport $\frac{a}{c}$ pour que l'énergie électromagnétique emmagasinée par le condensateur soit purement de nature électrique ?

A.N : $a = 3 \text{ cm}$ et $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$, préciser le domaine de pulsation respectant cette condition.

EXERCICE 3

Lancé le 20 juin 2008 de Vandenberg (Californie), le satellite océanographique Jason 2 permet, entre autres, de mesurer la hauteur des océans. Le problème étudie que l'influence de l'ionosphère sur la propagation des ondes radar.

Notations

Dans tout le problème, $\langle f(M, t) \rangle$ désigne la valeur moyenne dans le temps de la grandeur $f(M, t)$. La pulsation ω sera toujours réelle, positive et non nulle.

À toute grandeur réelle $f(M, t) = A(M) \cos(\omega t - \varphi(M))$, on pourra associer la grandeur complexe $\underline{f}(M, t) = A(M) \exp i(\omega t - \varphi(M))$.

I. – Ondes électromagnétiques dans le vide

1°/ Rappeler les équations de Maxwell en présence de charges et de courants. Quelles sont les traductions globales, dites aussi formes intégrales, de ces lois locales ?

2°/ Établir l'équation de propagation du champ $\vec{E}(M, t)$ dans le vide (en l'absence de charges et de courants).

3°/ On considère une onde dont le champ électrique en notation complexe s'écrit :

$$\underline{\vec{E}}(M, t) = E_0 \exp i(\omega t - kx) \vec{e}_y$$

où $E_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $k \in \mathbb{R}_+^*$.

Caractériser cette onde (donner 5 qualificatifs).

4°/ À quelle condition sur k et ω cette onde est-elle une solution de l'équation de propagation ? Comment appelle-t-on cette relation ? Le vide est-il un milieu dispersif ?

5°/ Déterminer l'expression réelle du champ magnétique $\vec{B}(M, t)$.

6°/ Déterminer l'expression du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}(M, t)$. Quelle est la signification physique du flux de $\vec{\Pi}$ à travers une surface S ouverte, arbitrairement orientée ?

II. Ondes électromagnétiques dans un milieu conducteur

1°/ En absence de densité volumique de charges, mais en présence de densité volumique de courants $\vec{J}(M, t)$, établir l'équation de propagation du champ $\vec{E}(M, t)$ en fonction de $\vec{J}(M, t)$.

2°/ On considère une onde du type $\underline{\vec{E}}(M, t) = E_0 \exp i(\omega t - \underline{k}x) \vec{e}_y$ où $E_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\underline{k} \in \mathbb{C}$. On pose, en notation complexe, la relation d'Ohm : $\underline{\vec{j}}(M, t) = \underline{\gamma} \underline{\vec{E}}(M, t)$ où $\underline{\gamma}$ est la conductivité électrique complexe du milieu, on suppose qu'elle ne dépend ni de l'espace ni du temps.

2.a/ Réécrire l'équation de propagation du champ $\underline{\vec{E}}(M, t)$ en fonction de $\underline{\gamma}$.

2.b/ Montrer que \underline{k} et ω vérifient l'équation suivante : $-\underline{k}^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = \mu_0 \underline{\gamma} i \omega$

On ne cherchera pas à résoudre cette équation.

3°/ On pose $\underline{k} = k_1 + i k_2$, avec k_1 et k_2 réels.

3.a/ Écrire en notation réelle l'expression du champ électrique $\vec{E}(M, t)$.

3.b/ Par analogie avec le vide, dire ce que représente k_1 , la partie réelle de \underline{k} . Donner une interprétation du signe de k_1 . Quel phénomène physique traduit k_2 , la partie imaginaire de \underline{k} ?

Que dire si le produit $k_1 k_2$ est positif ? Que dire si le produit $k_1 k_2$ est négatif ?

3.c/ Définir par une phrase la vitesse de phase v_ϕ et donner l'expression de la vitesse de phase de cette onde en fonction des grandeurs précédemment définies.

4°/ Démontrer une relation simple entre les vecteurs $\underline{E}(M, t)$, \underline{k} (vecteur d'onde complexe) et $\underline{B}(M, t)$.

Déterminer les expressions de la représentation complexe du champ magnétique $\underline{B}(M, t)$ et du champ réel $\bar{B}(M, t)$. Que dire des champs $\underline{E}(M, t)$ et $\underline{B}(M, t)$ si k_2 est non nul ?

5°/ Déterminer l'expression du vecteur de Poynting $\underline{\Pi}(M, t)$ puis l'expression de sa valeur moyenne $\langle \underline{\Pi}(M, t) \rangle$. Commenter.

6°/ Une onde incidente, $\underline{E}_i(M, t) = E_{0i} \exp j(\omega t - \underline{k}_A x) \underline{e}_y$ où $E_{0i} \in \mathbb{R}_+$ et $\underline{k}_A = k_{A1} + i k_{A2}$ avec k_{A1} et k_{A2} deux réels, se propageant dans le milieu (A) arrive en incidence normale sur une interface située en $x = 0$ et séparant le milieu (A) du milieu (B).

Cette onde incidente donne naissance à deux ondes, l'une réfléchie, $\underline{E}_r(M, t) = E_{0r} \exp j(\omega t + \underline{k}_A x) \underline{e}_y$, se propageant dans le milieu (A) et l'autre transmise, $\underline{E}_t(M, t) = E_{0t} \exp j(\omega t - \underline{k}_B x) \underline{e}_y$ où $\underline{k}_B = k_{B1} + i k_{B2}$ avec k_{B1} et k_{B2} deux réels, se propageant dans le milieu (B).

On définit les coefficients de réflexion et de transmission énergétiques au niveau de l'interface située en $x = 0$ par

$$R = \frac{\langle \underline{\Pi}_r(O, t) \rangle}{\langle \underline{\Pi}_i(O, t) \rangle} \quad \text{et} \quad T = \frac{\langle \underline{\Pi}_t(O, t) \rangle}{\langle \underline{\Pi}_i(O, t) \rangle}$$

Où $\langle \underline{\Pi}_i(O, t) \rangle$, $\langle \underline{\Pi}_r(O, t) \rangle$ et $\langle \underline{\Pi}_t(O, t) \rangle$ représentent respectivement les vecteurs de Poynting, au voisinage d'un point O de l'interface, des ondes incidente, réfléchie et transmise.

6.a/ Justifier l'écriture du champ $\underline{E}_r(M, t)$.

6.b/ Donner les expressions de R et de T en fonction des données précédentes.

6.c/ Que vaut la somme $R + T$? Quelle est la signification de cette égalité ?

6.d/ Que dire des coefficients R et T si $k_{B1} = 0$? Quelle en est la signification ?

Pouvez-vous prévoir ce résultat dès les questions II.4 ou II.5 ?

6.e/ Connaissez-vous un exemple similaire en électrocinétique ?

III. Propagation des ondes électromagnétiques dans l'ionosphère

L'ionosphère, couche de l'atmosphère située à plus de 60 km d'altitude, peut être considérée comme un plasma : c'est un milieu ionisé, caractérisé par une densité volumique d'électrons libres de charge e , de masse m_e , égale à $n_1 = 1,00 \cdot 10^{11} \text{ m}^{-3}$ et une densité volumique de cations de charge $+e$, de masse m_c , égale aussi à n_1 . La valeur de n_1 est supposée constante.

On se propose d'étudier dans ce milieu la propagation d'ondes du type $\vec{E}(M, t) = E_0 \exp(i(\omega t - \underline{k} x)) \vec{e}_y$, où $E_0 \in \mathbb{R}_+$ et $\underline{k} \in \mathbb{C}$. On pose à nouveau $\underline{k} = k_1 + i k_2$, avec k_1 et k_2 réels ; si $k_1 \neq 0$, alors on choisira $k_1 > 0$.

Dans toute la suite, vous pourrez utiliser les résultats démontrés dans la partie II.

Dans le plasma, les électrons et les ions sont soumis à la force de Lorentz due aux champs électrique et magnétique de l'onde. On négligera l'effet de la pesanteur et les interactions entre particules chargées, et on supposera que les particules sont non relativistes (i.e. leurs vitesses sont très petites devant c).

1°/ En admettant que le rapport $\omega / |\underline{k}|$ est de l'ordre de c , montrer que les effets de la partie magnétique de la force de Lorentz sont négligeables devant les effets de la partie électrique de la force de Lorentz.

2°/ En régime établi, et en supposant que l'amplitude des déplacements des charges reste petite devant la longueur d'onde, déterminer l'expression du vecteur vitesse \vec{v}_e (dans le référentiel galiléen d'étude) d'un électron, positionné en M à l'instant t , en fonction de m_e , e , ω et $\vec{E}(M, t)$. Donner l'expression du vecteur vitesse \vec{v}_i d'un ion. En déduire l'expression de la conductivité complexe du plasma $\underline{\gamma}$. À la vue des valeurs numériques, montrer que $\underline{\gamma} = -i \frac{n_1 e^2}{m_e \omega}$.

3°/ Calculer la puissance volumique moyenne fournie par le champ électromagnétique aux électrons libres. Commenter.

4°/ Établir l'expression de \underline{k}^2 dans le plasma. Mettre en évidence une pulsation caractéristique dite pulsation plasma ω_p ; donner son expression et calculer sa valeur numérique pour l'ionosphère. Calculer la longueur d'onde dans le vide λ_p associée. À quel domaine du spectre électromagnétique appartient cette longueur d'onde ?

5°/ On se place dans le cas $\omega < \omega_p$.

5.a/ Donner l'expression de \underline{k} en fonction de ω_p , ω et c (on prendra k_2 négatif).

5.b/ Donner les expressions des champs réels $\vec{E}(M, t)$ et $\vec{B}(M, t)$. Caractériser l'onde obtenue.

5.c/ Donner l'expression de $\langle \vec{\Pi}(M, t) \rangle$ dans le plasma.

6°/ On se place dans le cas $\omega > \omega_p$.

6.a/ Donner l'expression de \underline{k} en fonction de ω_p , ω et c . Commenter.

6.b/ Donner les expressions de $\vec{E}(M, t)$ et $\vec{B}(M, t)$. Caractériser l'onde obtenue (donner 5 qualificatifs).

6.c/ Donner l'expression de $\langle \vec{\Pi}(M, t) \rangle$.

6.d/ Déterminer l'expression de la vitesse de phase $v_\phi(\omega)$ de cette onde en fonction de ω_p , ω et c . Le milieu est-il dispersif (justifier la réponse) ?

6.e/ Calculer la vitesse de groupe $v_g(\omega)$ en fonction de ω_p , ω et c . Donner la signification physique de cette vitesse.

6.f/ Comparer $v_\phi(\omega)$ et $v_g(\omega)$ à c . Que penser du fait que $v_\phi(\omega)$ puisse être supérieure à c ?

7°/ Le choix de la fréquence des ondes radars émises par Jason 2 ($f = 13,6$ GHz) vous semble-t-il correct ?