UNIVERSITÉ DE SFAX

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieurs de Sfax

Année universitaire : 2017/2018

Examen d'Algèbre N°1

Section : MP 2

Durée : 2h | **Date : Décembre 2017** | **Nbre de pages : 2**

Notations et définitions

◇ Dans tout le problème, n désigne un entier supérieur ou égale à 2.

◇ Une matrice $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **stochastique** si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

(i) $\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2,\ a_{ij} \geq 0.$

(ii) $\forall i \in \{1,\dots,n\},\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1.$

◇ Soit $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $M_k = (m_{ij}(k))_{1\leq i,j\leq n}$. On rappelle que la suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $M = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ si

$$\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2,\ \lim_{k\longrightarrow+\infty} m_{ij}(k) = m_{ij}.$$

L'objet de ce problème est d'étudier quelques propriétés des matrices stochastiques.

Partie I : (Etude d'un exemple)

Soit a et b deux réels de $]0,1[$ tels que $a+b=1$. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$.

1. (a) Déterminer $\ker(A-I_3)$ et $\operatorname{Im}(A-I_3)$.

   (b) Montrer que $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = \ker(A-I_3) \oplus \operatorname{Im}(A-I_3)$.

2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.

   A est-elle digonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Partie II : (Etude générale)

Pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et $M = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note

$$\|X\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i| \text{ et } \|M\|_\infty = \max_{1\leq i,j\leq n} |m_{ij}|.$$

Dans cette partie, A désigne une matrice **stochastique** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

   Calculer AU. Déduire que $1 \in \mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(A)$.

2. (a) Vérifier que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}),\ \|AX\|_\infty \leq \|X\|_\infty$.

   (b) Déduire que, $\forall \lambda \in \mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(A),\ |\lambda| \leq 1$.

   (c) Montrer que $|\det(A)| \leq 1$.

3. (a) Soit $B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ |b_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |b_{ij}|$.

   Montrer que $\ker(B) = \{0\}$.

   (b) Déduire que si $\lambda \in \mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(A)$, alors il existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ vérifiant $|a_{kk} - \lambda| \leq 1 - a_{kk}$.

   (c) Soit λ une valeur propre complexe de A de module 1 et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda = e^{i\theta}$. Montrer que $\cos\theta = 1$ puis $\lambda = 1$.

Partie III : (Puissances d'une matrice stochastique)

1. Prouver que le produit de deux matrices stochastiques est une matrice stochastique.
2. Déduire que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice stochastique, alors $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k$ l'est.
3. Montrer que l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un fermé.
4. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la suite $(M^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   (a) Justifier que $\lim\limits_{k \longrightarrow +\infty} M^{2k} = L$.

   (b) Montrer que l'application $\phi : N \longmapsto N^2$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déduire que $L^2 = L$.

5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique. Soit $Y \in \mathrm{Im}(A - I_n)$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $Y = AX - X$. On suppose que $Y \in \ker(A - I_n)$.

   (a) Montrer que, $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k X = X + kY$.

   (b) Montrer que, $\forall k \in \mathbb{N},\ \|A^k X\|_\infty \leq \|X\|_\infty$.

   (c) Déduire que, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\|Y\|_\infty \leq \dfrac{2}{k} \|X\|_\infty$.

6. (a) Déduire que, $\mathrm{Im}(A - I_n) \cap \ker(A - I_n) = \{0\}$.

   (b) Montrer alors que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \ker(A - I_n) \oplus \mathrm{Im}(A - I_n)$.

Bon travail