INSTITUT PREPARATOIRE
AUX ETUDES D'INGENIEURS
DE SFAX

Département de la Préparation
Mathématiques Physique
Section MP2

Devoir de contrôle d'Algèbre MP2

Durée : 1h30mn **Date : 23-10-2017** **Nb pages : 2**

Exercice 1 Soit $(G, .)$ un groupe d'élément neutre e.

- Si H et F sont deux parties de G, on note

$$HF = \{h.f;\ (h, f) \in H \times F\}.$$

- Un sous-groupe H de G est dit distingué, et on note $H \rhd G$, si :

$$\forall (x, h) \in G \times H,\ x.hx^{-1} \in H.$$

1. Soit H et F deux sous-groupes de G. Montrer que HF est un sous-groupe de G si, et seulement si, $HF = FH$.
2. Soit H un sous-groupe **distingué** de G et F un sous-groupe de G.
   (a) Montrer que $HF = FH$.
   (b) Déduire que HF est un sous-groupe de G.
3. Soit φ un morphisme du groupe G dans un groupe G'.
   (a) Montrer que $\ker(\varphi) \rhd G$.
   (b) Montrer que si $H' \rhd G'$, alors $\varphi^{-1}(H') \rhd G$.
   (c) Soit $H \rhd G$. Montrer que $\varphi(H) \rhd \varphi(G)$.

Exercice 2 Soit $(G =< a >, .)$ un groupe cyclique d'ordre $n \geq 2$ engendré par a et d'élément neutre e.

Soit H un sous-groupe de G non réduit à $\{e\}$. On pose

$$I = \{k \in \mathbb{Z};\ a^k \in H\}$$

1. Justifier que a est d'ordre n.
2. Montrer que I est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.
3. Déduire qu'il existe un unique $p \in \mathbb{N}$ tel que $I = p\mathbb{Z}$.
4. Montrer que $H =< a^p >$.

5. Justifier que p divise n.
6. Calculer l'ordre de H.

Exercice 3 Répondre par vrai ou faux en justifiant :

1. $\overline{1}$ est le seul générateur du groupe $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, +)$.
2. Soit $(G =< a >, .)$ un groupe cyclique d'ordre $n \geq 2$. Alors :
   (a) G est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
   (b) Les générateurs de G sont les a^k, où $k \wedge n = 1$.
   (c) Le nombre de générateurs de G est $\varphi(n)$, où φ est la fonction d'Euler.
3. Les groupes $((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2, +)$ et $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ sont isomorphes.
4. Soit n entier ≥ 2. $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, .)$ est un corps si et seulement si, n est premier.
5. $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un corps ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
6. Soient $(A, +, \times)$ un anneau commutatif non nul. Alors
   (a) A est un corps si et seulement si, les seuls idéaux de A sont $\{0\}$ ou A.
   (b) Un idéal I de A set dit premier si :
   $$\forall (a, b) \in A^2, \ ab \in I \Longrightarrow a \in I \text{ ou } b \in I.$$
   (i) L'anneau A est intégre si et seulement si, (0) est un idéal premier.
   (ii) Soit n entier ≥ 2. Les idéaux premiers de l'anneau $(\mathbb{Z}, +, .)$ sont les $p\mathbb{Z}$ où $p \in \mathbb{N}$.