

## Devoir de contrôle de M.S.I - Semestre N°1

Sections : M.P2 &amp; P.C.2

Durée : 1h30

Date : 27 Octobre 2017

Nbre de pages : 4

N.B : *Aucun document n'est autorisé.*

## Étude d'une station éolienne de pompage d'eau souterraine

L'étude portera sur le mécanisme d'entraînement de la pompe dont le schéma cinématique est représenté par la figure 1. Ce mécanisme est constitué principalement des éléments suivants :

- le bâti (0) est lié au repère  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  supposé galiléen,
- l'excentrique (1), lié au repère  $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ , est en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z}_0)$  avec le bâti (0). Son mouvement est paramétré par l'angle  $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$  (figure 2.a),
- la bielle (2), liée au repère  $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$ , est en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z}_0)$  avec l'excentrique (1). Son mouvement est paramétré par l'angle  $\beta = (\vec{x}_0, \vec{x}_2) = (\vec{y}_0, \vec{y}_2)$  (figure 2.b),
- le piston (3), lié au repère  $R_3(D, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)$ , est en liaison pivot d'axe  $(B, \vec{z}_0)$  avec la bielle (2). Il est également en liaison glissière d'axe  $(C, \vec{y}_0)$  avec le bâti (0),
- la biellette (4), liée au repère  $R_4(D, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_0)$ , est en liaison pivot d'axe  $(D, \vec{z}_0)$  avec le piston (3). Son mouvement est paramétré par l'angle  $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_4) = (\vec{y}_0, \vec{y}_4)$  (figure 2.c),
- le balancier (5) lié au repère  $R_5(E, \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_0)$ , est en liaison pivot d'axe  $(E, \vec{z}_0)$  avec la biellette (4). Il est également en liaison pivot d'axe  $(F, \vec{z}_0)$  avec le bâti (0). Son mouvement est paramétré par l'angle  $\varphi = (\vec{x}_0, \vec{x}_5) = (\vec{y}_0, \vec{y}_5)$  (figure 2.d).

Le balancier (5) est composé de deux tiges ((EF) et (FM)) soudées au point F et formant entre elles un angle constant  $\pi - \Psi$ . A l'extrémité M est accrochée une masselotte. Pour simplifier le paramétrage et par conséquent les calculs, on introduit une base intermédiaire. Cette base ortho-normée directe  $B_{51}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0)$  est tel que :  $\Psi = (\vec{x}_5, \vec{u}) = (\vec{y}_5, \vec{v}) = Cte$  (figure 2.e).

Les positions des différents points sont définies par les vecteurs suivants :

$$\begin{aligned} \vec{OC} &= a_0 \vec{x}_0, & \vec{CF} &= b_0 \vec{y}_0, & \vec{OA} &= a_1 \vec{x}_1, & \vec{AB} &= a_2 \vec{x}_2, & \vec{BD} &= b_1 \vec{y}_0, & \vec{DE} &= a_4 \vec{x}_4, \\ \vec{FE} &= a_5 \vec{x}_5, & \vec{MF} &= d \vec{u}, & \vec{CD} &= \lambda \vec{y}_0 \end{aligned}$$

où :

- $\alpha, \beta, \theta$  et  $\varphi$  sont les paramètres angulaires du mécanisme,
- $\lambda$  est un paramètre de translation,
- $a_0, a_1, a_2, a_4, a_5, b_0, b_1$  et  $d$  sont des constantes géométriques du mécanisme.

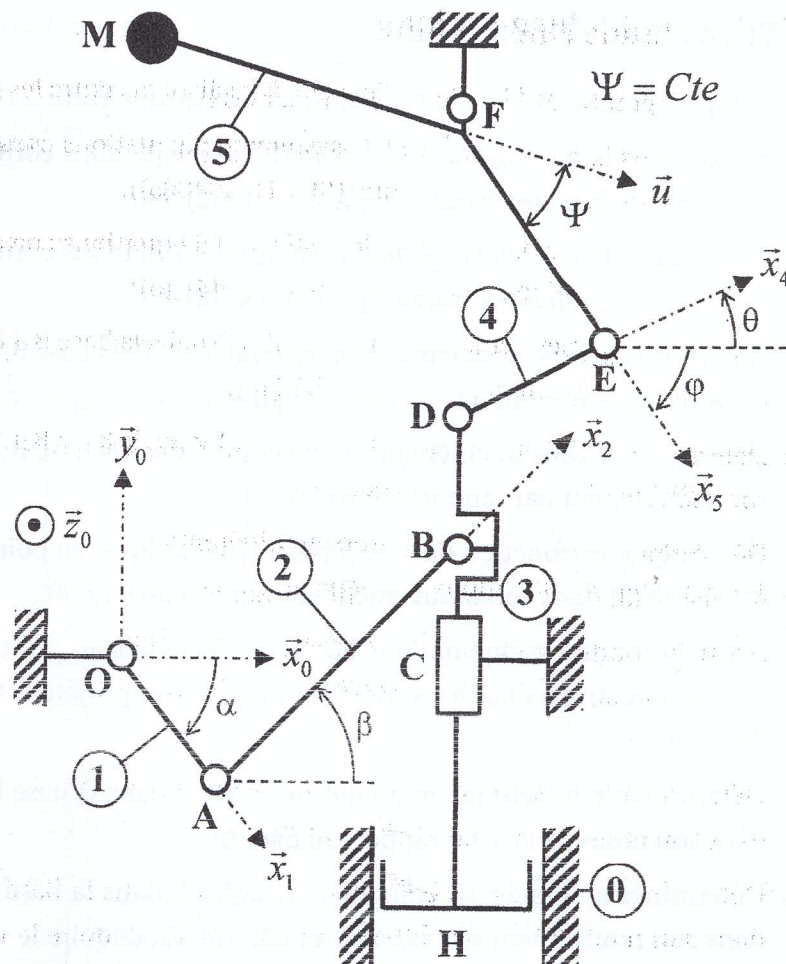


FIGURE 1 – Schéma cinématique du mécanisme d'entraînement de la pompe

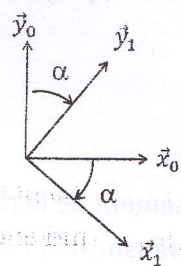


Figure 2.a

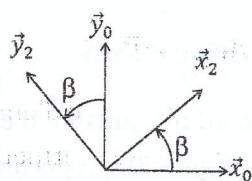


Figure 2.b

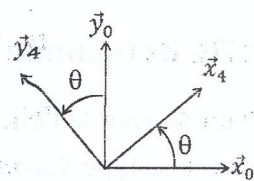


Figure 2.c

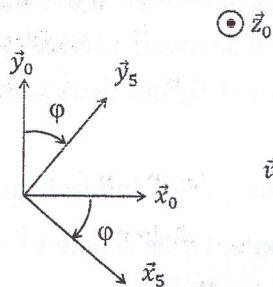


Figure 2.d

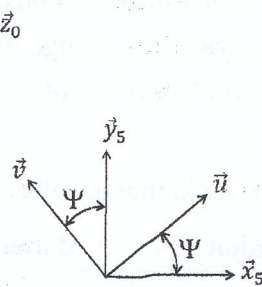


Figure 2.e

FIGURE 2 – Orientation des bases des différents repères liés aux solides



## PARTIE A : Étude cinématique

- A.1. Tracer le graphe des liaisons et identifier les liaisons entre les différents solides.
- A.2. Écrire, dans la base  $B_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ , le système d'équations correspondant à la fermeture géométrique de la chaîne cinématique ((0)-(1)-(2)-(3)).
- A.3. Écrire, dans la base  $B_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ , le système d'équations correspondant à la fermeture géométrique de la chaîne cinématique ((0)-(3)-(4)-(5)).
- A.4. Déterminer le torseur cinématique, au point O dans la base  $B_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ , de l'excentrique (1) dans son mouvement par rapport au bâti (0).
- A.5. Déterminer le torseur cinématique, au point A dans la base  $B_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ , de la bielle (2) dans son mouvement par rapport au bâti (0).
- A.6. Déterminer, en fonction de  $\lambda$ , le torseur cinématique, au point D dans la base  $B_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ , du piston (3) dans son mouvement par rapport au bâti (0).
- A.7. Écrire la condition cinématique au niveau de la liaison pivot, au point B, entre la bielle (2) et le piston (3). En déduire le système d'équations, projetées sur la base  $B_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ , qui en découle.
- A.8. Déterminer le torseur cinématique, au point D dans la base  $B_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ , de la biellette (4) dans son mouvement par rapport au bâti (0).
- A.9. Déterminer le torseur cinématique, au point F dans la base  $B_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ , du balancier (5) dans son mouvement par rapport au bâti (0). En déduire le vecteur vitesse du point M appartenant à (5) dans son mouvement par rapport à (0).
- A.10. Écrire la condition cinématique au niveau de la liaison pivot, au point E, entre la biellette (4) et le balancier (5). En déduire le système d'équations, projetées sur la base  $B_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ , qui en découle.

## PARTIE B : Géométrie des masses

Pour fournir de l'énergie au mécanisme d'entraînement de la pompe, on utilise une éolienne à axe vertical type *Savonius* (figure 3) qui permet de transformer l'énergie du vent en énergie mécanique de rotation.

L'éolienne est constituée de deux pales identiques légèrement désaxées. Chaque pale est assimilée à un demi-cylindre homogène de rayon intérieur  $R_1$ , de rayon extérieur  $R_2$ , de hauteur  $H$  et de masse  $m$ . Les centres d'inertie  $G_1$  et  $G_2$  des deux pales appartiennent au plan de symétrie matérielle  $(O, \vec{x}, \vec{y})$ .

- B.1. Déterminer la masse volumique ( $\rho$ ) du matériau constituant les deux pales.
- B.2. La position du centre d'inertie  $G_1$  de la pale 1 est définie par :  $\overrightarrow{O_1G_1} = a\vec{x}$ .  
Exprimer  $a$  en fonction de  $R_1$  et  $R_2$ .
- B.3. Vérifier que le point O est le centre d'inertie de l'ensemble S constitué des deux pales.
- B.4. Donner et justifier la forme de la matrice d'inertie de l'ensemble S :  $[I_O(S)]_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$

- B.5.** Exprimer en fonction de  $m$ ,  $R_1$  et  $R_2$  le moment d'inertie  $I_1$  de la pale 1 par rapport à l'axe  $(O_1, \vec{z})$ .
- B.6.** Exprimer en fonction de  $I_1$ ,  $m$  et  $d$  le moment d'inertie  $I$  de l'ensemble S par rapport à l'axe  $(O, \vec{z})$ .

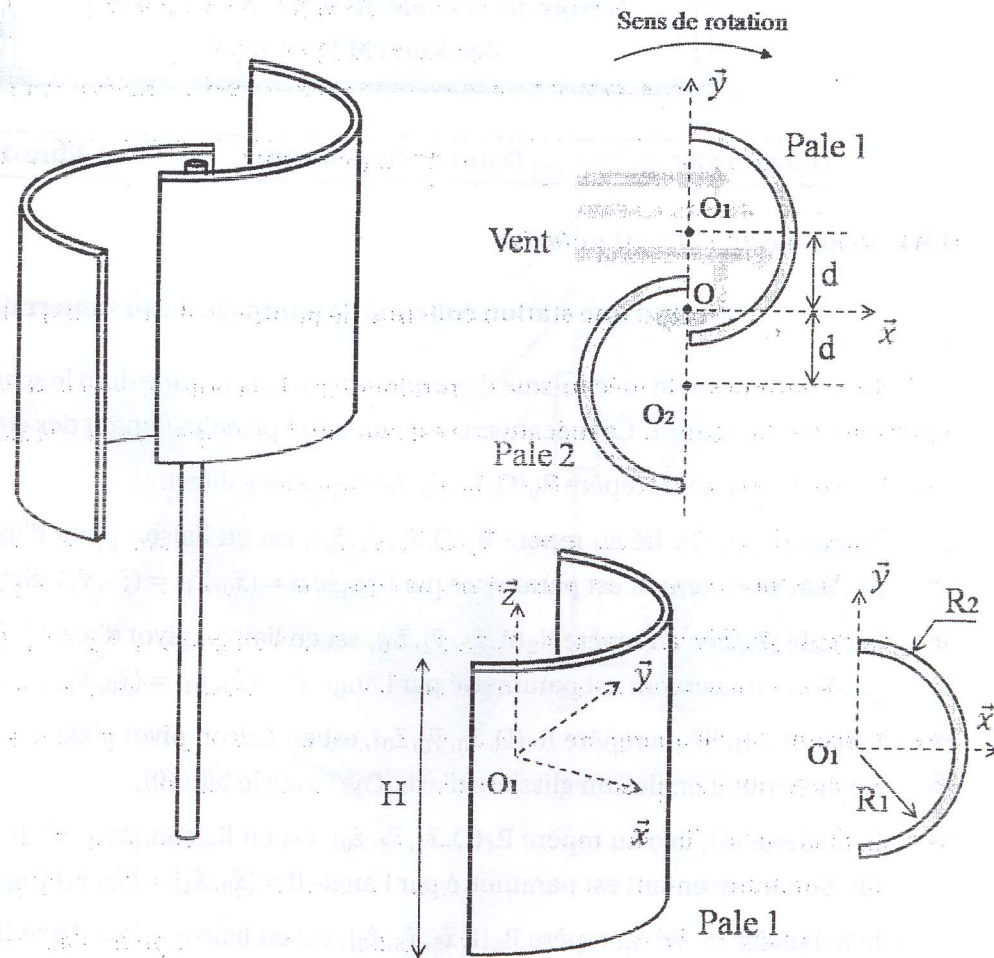


FIGURE 3 – Éolienne de type Savonius