UNIVERSITÉ DE SFAX **Année universitaire : 2018/2019**

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieurs de Sfax

Examen d'Algebre - Semestre N°1
Section : M.P.2

Durée : 2h **Date : 10 Décembre 2018** **Nbre de pages : 3**

Exercice 1

1. Soit $C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que $C^2 - tr(C)C + \det(C)I_2 = 0$.
   (b) Déduire que
      i. $C^2 \in vect(I_2, C)$.
      ii. Si C est inversible alors $C^{-1} \in vect(I_2, C)$.
2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $E = \{M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta b & \beta a + \alpha \end{pmatrix}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$.
   (a) Trouver une matrce $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $E = vect(I_2, A)$.
   (b) Déduire que E est une sous algèbre commutative de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de dimension 2.
   (c) Donner une condition nécessaire et suffisante sur (a, b) pour que E soit un corps.

Exercice 2

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E.

Pour tout $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$, on note $X = mat(x, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ défini par $mat(f, \mathcal{B}) = A$.

1. (a) Soit $v \in E \setminus \{0\}$.
   Montrer que la droite vectorielle $vect(v)$ est stable par f si et seulement si v est un vecteur propre de f.
   (b) Déduire que si $sp(f) \neq \emptyset$ alors il existe une droite vectorielle stable par f.
2. On suppose que $sp(f) = \emptyset$.
   (a) Justifier que n est pair.
   (b) Existe-t-il une droite vectorielle de E stable par f.

(c) Soit $\lambda \in sp_{\mathbb{C}}(A)$ et $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ tel que $AV = \lambda V$.

On pose $\lambda = a + ib$, $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ et $V = V_1 + iV_2$, $(V_1, V_2) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$.

Justifier les assertions suivantes ;

i. $V_2 \neq 0$

ii. (V_1, V_2) est libre.

iii. $AV_1 = aV_1 - bV_2$ et $AV_2 = bV_1 + aV_2$

(d) Déduire que $vect(V_1, V_2)$ est un plan de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ stable par A.

(e) Montrer qu'il existe un plan de E stable par f.

3. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^2 + f + id_E = \widetilde{0}$.

(a) Montrer que $sp(f) = \emptyset$.

(b) Soit $x \in E \setminus \{0\}$. Montrer que $vect(x, f(x))$ est un plan stable par f.

Exercice 3

On note $A_1 = (0) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et pour $n \geq 2$, $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On pose P_n le polynôme caractéristique de A_n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On note la norme infinie définie sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ par

$\|V\|_\infty = max\{|v_1|, ..., |v_n|\}$, pour tout $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

1. Déterminer P_1 et P_2.

2. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_{n+2}(X) = XP_{n+1}(X) - P_n(X)$.

(b) Déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $det(A_{n+2}) = -det(A_n)$.

(c) Donner l'expression de $det(A_n)$, pour $n \geq 1$. (On discutera suivant la parité de n).

3. (a) Montrer que $rg(A + 2I_n) = rg(A - 2I_n) = n$

(b) déduire que 2 et -2 ne sont pas des valeurs propres de A_n.

4. (a) Montrer que, pour tout $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|A_nV\|_\infty \leq 2\|V\|_\infty$.

(b) Déduire que $sp_{\mathbb{R}}(A_n) \subset]-2, 2[$.

(c) Déduire que, si $\lambda \in sp_{\mathbb{R}}(A_n)$, alors il existe un unique $\theta \in]0, \pi[$ tel que $\lambda = 2\cos(\theta)$.

5. Pour tout $\theta \in]0, \pi[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = P_n(2\cos(\theta))$.

(a) Montrer que $u_1 = 2\cos(\theta)$, $u_2 = 4\cos^2(\theta) - 1$ et que

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+2} - 2\cos(\theta)u_{n+1} + u_n = 0$

(b) Déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$.

(c) Déduire que $sp_{\mathbb{R}}(A_n) = \{\lambda_k = 2\cos(\frac{k\pi}{n+1}), 1 \leq k \leq n\}$ et que A_n est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(d) Déduire que $\displaystyle\prod_{k=1}^{2n} \cos(\frac{k\pi}{2n+1}) = \frac{(-1)^n}{2^{2n}}$ et que $\displaystyle\prod_{k=1}^{2n+1} \cos(\frac{k\pi}{2n+2}) = 0$

6. Soit $k \in \{1, ..., n\}$ et $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On pose $v_0 = v_{n+1} = 0$.

(a) Montrer que $AV = \lambda_k V \iff v_{j+2} - \lambda_k v_{j+1} + v_j = 0$, $\forall j \in \{0, ..., n-1\}$.

(b) Déterminer le sous espace propre de A_n associé à λ_k.

7. Soit $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})^2$.

On définit la matrice $B_n = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$\forall (i,j) \in \{1, ..., n\}^2,\ b_{ij} = \begin{cases} \beta \text{ si } |i-j| = 1 \\ \alpha \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$B_n = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & \cdots & 0 \\ \beta & \alpha & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \beta \\ 0 & \cdots & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

(a) Vérifier que $B_n = \alpha I_n + \beta A_n$ et que B_n est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de B_n.