UNIVERSITÉ DE SFAX 　　　　　　　　　　　　Année universitaire : 2018/2019

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieurs de Sfax

Devoir d'Algèbre - Semestre N°1
Sections : M.P.2

Durée : 1h | **Date : 3 Novembre 2018** | **Nbre de pages : 2**

Exercice 1

Dans tout l'exercice $(G, .)$ est un groupe d'élément neutre e.
Pour $a \in G$, on note $o(a)$ l'ordre de a.

1. Dans cette question on suppose que G est un groupe abélien.
   (a) Montrer que $F = \{x \in G \text{ tel que } x \text{ est d'ordre fini }\}$ est un sous groupe de G.
   (b) Soient a et b deux éléments de G d'ordres respectifs p et q tels que $p \wedge q = 1$.
   Montrer que $o(ab) = pq$.
2. Dans cette question on suppose que G est un groupe fini d'ordre n.
   (a) Soit $a \in G$. Montrer que $G = \langle a \rangle \iff o(a) = n$.
   (b) Déduire que G est cyclique si et seulement si G contient un élément d'ordre n et que si n est premier alors G est cyclique..
   (c) Le groupe de Klein $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est il cyclique ?
3. Dans cette question on suppose que $G = \langle a \rangle$ est un groupe cyclique d'ordre n.
   (a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $o(a^p) = \dfrac{n}{n \wedge p}$.
   (b) Déduire que $G = \langle a^p \rangle \iff n \wedge p = 1$ et que G admet exactement $\varphi(n)$ générateurs.
   où $\varphi(n) = card(\{k \in \{1, ..., n\} \ ; \ k \wedge n = 1\})$.

Exercice 2

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse :

1. Pour tout anneau $(A,+,.)$ on note $\mathcal{U}(A)$ le groupe des éléments inversibles de A.
   (a) $\mathcal{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \{\overline{k};\ k \wedge n = 1\}$.
   (b) $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ est un corps.
   (c) $\mathcal{U}(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})$ est cyclique.
   (d) $\mathcal{U}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K});\quad det(M) = 1\}$.
2. (a) Tout groupe cyclique est fini.
   (b) Tout groupe fini est cyclique.
3. (a) L'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est intègre.
   (b) $\mathcal{D}_n(\mathbb{K}) = \{diag(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\}$ est une $\mathbb{K}$-algèbre commutative.
4. Soient A et A' deux anneaux commutatifs et soit $f : A \longrightarrow A'$ un morphisme d'anneaux.
   (a) Si J est un idéal de A' alors $f^{-1}(J)$ est un idéal de A.
   (b) $\ker(f)$ est un idéal de A.
   (c) Si A et A' sont des corps, alors f est injectif.
5. $\mathbb{K}$ est un corps si et seulement si ses seuls idéaux sont $\{0\}$ et $\mathbb{K}$.