

Mardi 11 Décembre 2018

Institut préparatoire aux études de l'ingénieur de Sfax

Examen 1 de PHYSIQUE

MP 2 – PT 2

Durée : 4 heures

N.B. : Une grande importance sera attachée à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Données utiles:

- * Célérité de la lumière dans le vide $c = 3.10^8 \text{ m/s}$
- * Perméabilité magnétique du vide $\mu_0 = 4\pi.10^{-7} \text{ H/m}$
- * Pour $x \ll 1$; $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^n \prod_{p=0}^{k-1} (\alpha - p) \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$
- * L'équation $x \ln(x) = x + 1$ a pour solution approchée $x \approx 3,59$
- * Les relations de passage : $\vec{n}_{1 \rightarrow 2} \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$, $\vec{n}_{1 \rightarrow 2} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 \vec{j}_s$

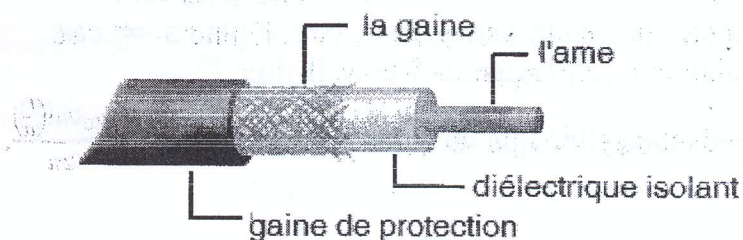
Soit G une grandeur scalaire et \vec{a} un champ vectoriel. On donne en coordonnées

cylindriques : $\overrightarrow{\text{grad}} G = \frac{\partial G}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial G}{\partial z} \vec{u}_z$; $\Delta G = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial G}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 G}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2}$

$\text{div } \vec{a} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$; $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{a}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \vec{a}) - \Delta \vec{a}$

$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{a} = \left(\frac{\partial}{\partial r} \right) \wedge \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right) \begin{pmatrix} a_r \\ a_\theta \\ a_z \end{pmatrix}$; Si $\vec{a} = a_r(r,z) \vec{u}_r$, $\Delta \vec{a} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial r} - \frac{a_r}{r^2} + \frac{\partial^2 a_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 a_r}{\partial z^2} \right) \vec{u}_r$

LE CÂBLE COAXIAL



Les câbles coaxiaux sont utilisés comme moyen de transmission d'informations. Ils sont conçus pour transmettre des signaux sans trop d'atténuation et pour assurer une protection contre les perturbations extérieures. On les utilise notamment pour les câbles d'antenne de télévision, pour transmettre des signaux audionumériques, ainsi que pour des interconnexions dans les réseaux informatiques.

Remarque : Les différentes parties sont très peu dépendantes.

Un câble coaxial, représenté en figure 1, est constitué d'un fil de cuivre cylindrique central de longueur $l = 100 \text{ m}$, de rayon $a = 0.43 \text{ mm}$, appelé âme, et d'un conducteur cylindrique creux de même axe de révolution, également en cuivre de même longueur, appelé gaine et de rayon intérieur $b = 1.47 \text{ mm}$. Un isolant de permittivité diélectrique relative ϵ_r occupe tout l'espace entre l'âme et la gaine. On assimilera le câble coaxial à deux surfaces parfaitement conductrices (sauf dans la partie V). On négligera les effets de bord. L'espace entre les conducteurs sera assimilé au vide de permittivité électrique ϵ_0 ($\epsilon_{r,\text{vide}} = 1$) sauf explicitation contraire où on remplacera ϵ_0 par $\epsilon_r \epsilon_0$.

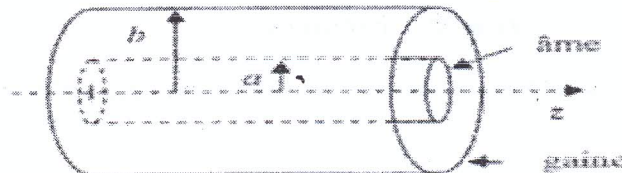


Figure 1 : Portion de câble

I – Modélisation - Etude statique.

1. Rappeler la définition et les propriétés d'un conducteur parfait. (0,5 pt)

I-A- Capacité linéique Γ (1,25 pts)

On suppose ici que les conducteurs intérieur (1) et extérieur (2) portent les charges électrostatiques respectives $Q > 0$ et $-Q$. Elles sont uniformément réparties en surface.

2. Justifier que le potentiel électrostatique $V(M)$ dépend que de r .

3. Résoudre l'équation de Laplace vérifiée par le potentiel électrostatique $V(a \leq r \leq b)$ dans la région $a \leq r \leq b$ (On fera apparaître deux constantes α_1 puis α_2).

4. En déduire le champ électrostatique $\vec{E}(a < r < b)$ en fonction de α_1 et r .

5. En appliquant le théorème de Gauss, exprimer α_1 en fonction de Q , ϵ_0 et l .

6. Les conducteurs (1) et (2) sont portés respectivement aux potentiels constants V_1 et $V_2 < V_1$. Déduire la capacité linéique $\Gamma = \frac{Q}{l(V_1 - V_2)}$ du câble en fonction de a , b et ϵ_0 .

I-B- Inductance linéique Λ (1,25 pts)

On suppose ici que le câble coaxial est alimenté par un générateur de courant continu. Le conducteur intérieur assure le transport du courant aller I_0 , le conducteur extérieur assure le transport du courant retour $-I_0$. Les répartitions de ces courants sont superficielles et uniformes sur chaque conducteur. Pour le conducteur (1), on a une densité surfacique de courant $\vec{J}_{s1} = \frac{I_0}{2\pi a} \vec{u}_z$.

7. Déterminer le champ $\vec{B}(a < r < b)$ en fonction de I_0 , μ_0 et r .

8. Représenter les lignes du champ magnétique dans le plan $z = \text{cte}$.

9. Commenter en relation avec l'équation Maxwell-flux.

10. Montrer que l'inductance linéique du câble coaxial vaut $\Lambda = \frac{\mu_0 \ln\left(\frac{b}{a}\right)}{2\pi}$.

11. Commenter.

II- Onde électromagnétique et impédance du câble coaxial.

II-A- Détermination de l'onde (3 pts)

On se place ici dans le cadre général de la théorie de l'électromagnétisme. On considère le câble comme infini suivant l'axe des z . Une onde électromagnétique se propage à l'intérieur du câble dans la région $a < r < b$, assimilable au vide.

12. Rappeler les équations de Maxwell dans le vide (sans charges ni courants).

13. Etablir l'équation de propagation vérifiée par le champ électrique.

On suppose ici que le champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) est de la forme :

$$\begin{cases} \vec{E}(r, z, t) = E_m(r, z) \exp j(\omega t - kz) \vec{u}_r \\ \vec{B}(r, z, t) = B_m(r, z) \exp j(\omega t - kz) \vec{u}_\theta \end{cases} \text{ où } k \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } j^2 = -1.$$

Cela revient à considérer une solution particulière des équations de Maxwell, dite « mode Transverse Electrique et Magnétique TEM ».

14. Pourquoi cette solution particulière est-elle nommée TEM ?

15. Justifier que les deux fonctions $E_m(r, z)$ et $B_m(r, z)$ sont indépendantes de z .

16. Montrer que $E_m(r, z) = \frac{E_0 a}{r}$ où on note E_0 l'amplitude maximale du champ \vec{E} .

17. L'onde est-elle plane ? Est-elle progressive ? Si oui, dans quelle direction ?

18. En déduire la relation de dispersion liant k et ω . Le milieu est-il dispersif ?

19. Déterminer l'expression du champ magnétique complexe $\vec{B}(r, z, t)$. Commenter.

20. Déterminer le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}(r, z, t)$.

21. Déduire la puissance moyenne transportée par le câble $\langle P_{ray}(z, t) \rangle$.

22. Calculer la valeur de E_0 pour une puissance moyenne transportée de 10 W.

23. Déterminer $v_{\text{énr}}$ la vitesse de propagation de l'énergie dans le câble.

II-B- Impédance caractéristique du câble coaxial (1,5 pts)

24. Déterminer l'expression de la densité surfacique de charge $\sigma(r = a, z, t)$.

25. Déterminer la densité surfacique de courant $\vec{j}_{s1}(r = a, z, t)$.

26. L'équation locale de la conservation de la charge est-elle vérifiée ?

27. En régime variable, le champ électrique s'écrit $\vec{E} = -\text{grad } V + \vec{E}_{\text{ind}}$. On admettra éventuellement que $\vec{E}_{\text{ind}}(r, z, t)$ est porté par le vecteur \vec{u}_z .

En un point de cote z donné, par un calcul de circulation, déterminer la différence de potentiel $u(z, t) = V_1(z, t) - V_2(z, t)$, en fonction de E_0, a, b, k, z, ω et t .

28. Pour z donné, déterminer le courant $i(z, t)$ véhiculé par l'âme du câble coaxial.

29. On définit l'impédance caractéristique du câble : $Z_c = \frac{u(z, t)}{i(z, t)}$. En tenant compte de

l'isolant séparant l'âme de la gaine, montrer que $Z_c = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_r \epsilon_0}} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

III- Propagation et réflexion des ondes de tension et du courant.

III-A-Equation de propagation (1 pt)

La gaine est maintenant reliée à la masse ($V_2 = 0$), et l'âme, portée au potentiel $V(z, t)$, est parcourue par le courant $i(z, t)$. On adopte le modèle bifilaire local de la portion de câble coaxial de longueur dz (figure 2) à l'instant t où Λ et Γ désignent respectivement l'inductance linéique et la capacité linéique du câble coaxial.

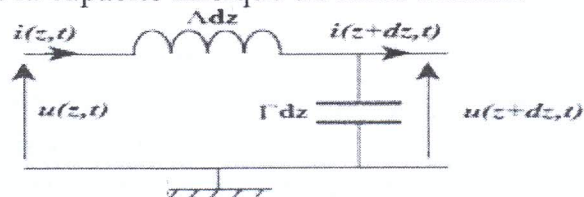


Figure 2

30. Justifier l'absence des résistances dans ce modèle.

31. On rappelle que $h(x + dx, t) - h(x, t) = \frac{\partial h(x, t)}{\partial x} dx$. Montrer que
$$\begin{cases} \frac{\partial i}{\partial z} = -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t} & (1) \\ \frac{\partial u}{\partial z} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t} & (2) \end{cases}$$

32. En déduire que la tension $u(z, t)$ et l'intensité $i(z, t)$ vérifient l'équation d'onde de D'Alembert, puis donner la célérité $v = \frac{1}{\sqrt{\Gamma\Lambda}}$ des ondes susceptibles de se propager dans le câble. Commenter.

III-B- Phénomène de réflexion en bout de câble (1,5 pts)

On s'intéresse au cas d'ondes sinusoïdales de pulsation ω .

On posera $\underline{u}(z, t) = \underline{u}_{inc}(z, t) + \underline{u}_{ref}(z, t)$.

Avec $\underline{u}_{inc}(z, t) = \underline{U}_{oi} \exp(j(\omega t - kz))$ et $\underline{u}_{ref}(z, t) = \underline{U}_{or} \exp(j(\omega t + kz))$.

Le câble est relié à un Générateur de Basses Fréquences pouvant fournir des signaux de différentes formes (sinusoïdal, créneau avec possibilité d'asymétrie, impulsion), et refermé par une résistance R_L à l'extrémité située en $z = 0$.

Le choix de l'origine des temps nous permet de poser : $\underline{u}(0, t) = U_0 \exp(j\omega t)$.

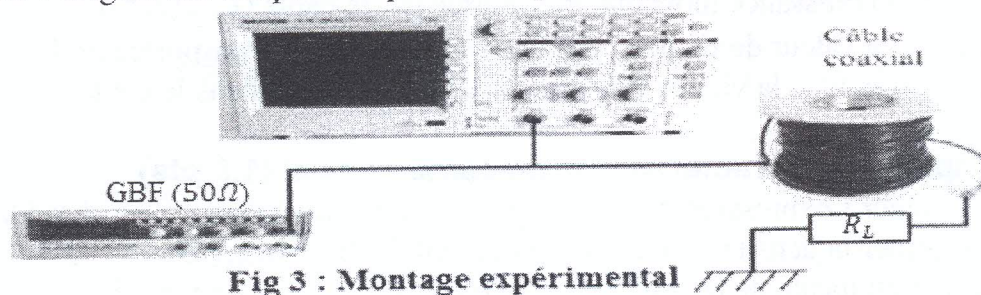


Fig 3 : Montage expérimental

33. Justifier la présence d'une onde réfléchie.

34. Justifier que $Z_{c,ref} = -Z_c$ pour l'onde réfléchie.

35. Montrer que le coefficient de réflexion en tension $\underline{r}_U = \frac{\underline{U}_{or}}{\underline{U}_{oi}}$ s'écrit $\underline{r}_U = \frac{R_L - Z_c}{R_L + Z_c}$.

36. Commenter l'éventuel déphasage entre les deux ondes.

Pour quelle(s) valeur(s) de R_L obtient-on :

37. Une réflexion totale ?

38. Une transmission totale ?

IV- Etude expérimentale.

IV-A- Mise en évidence (1,5 pts)

On utilise un générateur d'impulsion pour créer des pulses suffisamment espacés et étroits pour ne pas se superposer après réflexion dans le câble coaxial (par exemple, d'une durée de 10 ms et d'une largeur d'environ 100 ns) figure 4-a. L'amplitude du



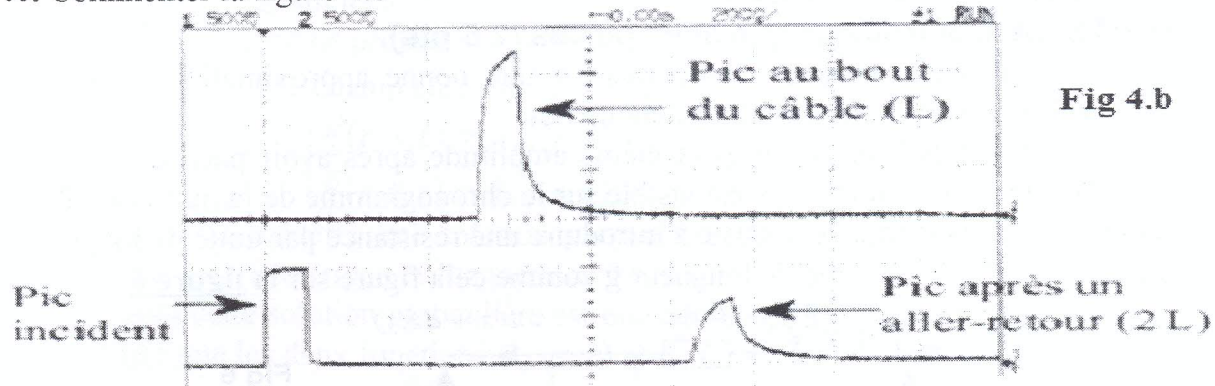
Fig 4.a

pulse est de quelques volts.

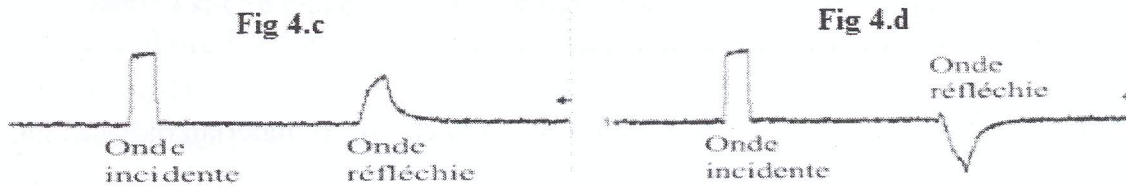
39. Donner une valeur approchée de l'impédance interne du GBF utilisé.

Pour bien comprendre ce qui se passe dans le câble, examinons dans un premier temps ce que l'on observe à l'oscilloscope avec l'extrémité du câble ouverte $R_L = \infty$. On obtient l'oscillogramme Figure 4b.

40. Commenter la figure 4.b



41. Identifier (d'après 37) les figures 4.c et 4.d.



42. Déterminer les valeurs numériques de la célérité v , et de ε_r .

43. En déduire la valeur de Z_c . Commenter.

44. L'oscilloscope utilise 2000 points. Déterminer la fréquence d'échantillonnage F_e .

45. Justifier que le critère de Shannon est vérifié dans cette expérience.

IV-B- Etude en régime sinusoïdal (1,5 pts)

Le générateur délivre maintenant un signal sinusoïdal de fréquence 400 kHz . L'observation se fait à l'oscilloscope pour la tension à l'entrée et au bout du câble.

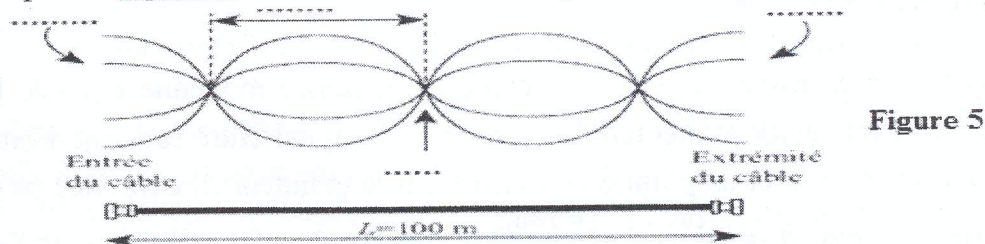
46. Commenter le déphasage observé entre les deux signaux.

* Considérons le cas $R_L = \infty$

En faisant varier continûment la fréquence, on constate que l'amplitude du signal sinusoïdal que l'on observe au début du câble varie. Elle passe par un maximum, puis un minimum et ainsi de suite.

47. Justifier que l'onde est stationnaire. Citer une situation similaire vue dans le cours.

48. Recopier la **figure 5** ci-dessous sur votre copie et la compléter.



On fait varier la fréquence de la source et on observe la tension en $z = 0$. On constate alors que l'amplitude de celle-ci est maximale aux fréquences suivantes :

$f \text{ (MHz)}$	0.94	1.93	2.88	3.92	4.82	5.84	6.82
-------------------	------	------	------	------	------	------	------

49. Proposer une méthode permettant de mesurer la célérité de l'onde dans le câble.

50. Application numérique. Commenter.

* Considérons le cas $R_L = 0$.

51. Représenter une figure analogue à la **figure 5** (ventre de tension à l'entrée du câble).

52. Exprimer la longueur l du câble en fonction de la longueur d'onde λ_n du mode n .

V- Le câble coaxial avec pertes.

V-A-Modèle électrocinétique avec pertes (2,5 pts).

Le modèle du câble coaxial sans pertes est une bonne approximation, mais il est insuffisant pour interpréter certains phénomènes.

Par exemple, l'impulsion n'a plus la même amplitude après avoir parcouru un aller-retour dans le câble comme cela est visible sur le chronogramme de la question 40.

Un modèle plus performant consiste à introduire une résistance par unité de longueur ρ et une conductance par unité de longueur g comme cela figure sur la **figure 6**.

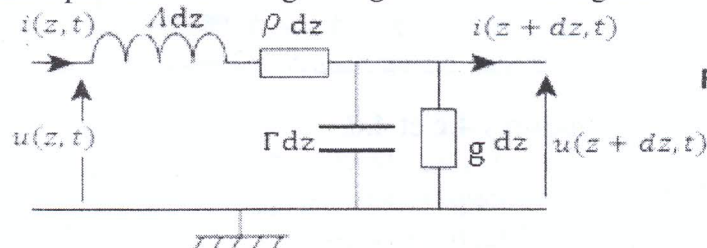


Fig 6

On donne $g = \frac{2\pi\gamma_{iso}}{\ln(\frac{b}{a})}$ où $\gamma_{iso} = 10^{-17} \text{ Sm}^{-1}$ est la conductivité du matériau diélectrique.

53. Calculer g . Simplifier alors le circuit de la **figure 6**.

54. Montrer que l'onde de tension $u(z, t)$ obéit à l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \Gamma \Lambda \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \rho \Gamma \frac{\partial u}{\partial t} = 0$

55. On considère une solution de la forme $\underline{u}(z, t) = \underline{U}_0 \exp(j(\omega t - \underline{k}z))$ où $\underline{k} \in \mathbb{C}^*$,

Montrer que la relation de dispersion s'écrit : $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{v^2} - j\rho\Gamma\omega$

En admettant que la correction au modèle parfait soit légère c'est-à-dire que $\frac{\rho}{\Lambda\omega} \ll 1$

56. Ecrire à l'ordre 2 le développement en puissances de $\frac{\rho}{\Lambda\omega}$ dans l'expression de $\underline{k}(\omega)$.

Calculer dans ce cas :

57. La vitesse de phase v_ϕ .

58. La vitesse de groupe v_g .

59. Conclure à propos la dispersion et l'absorption de l'onde dans le câble coaxial.

Dans la suite (jusqu'à 64), on prend $\underline{k} = \frac{\omega}{v} - jk'' = \frac{\omega}{v} - j\frac{\rho}{2Z_c}$

60. En utilisant **la figure 4.b**, estimer la valeur de k'' .

61. Dédire celle de ρ .

62. On mesure à l'aide d'un ohmmètre $R_{\text{câble}} \approx 5\Omega$ à $\omega = 0$. Commenter.

63. Soit $\underline{i}(z, t) = \underline{I}_0 \exp(j(\omega t - \underline{k}z))$, calculer la puissance moyenne $P(z)$ de l'onde.

64. On définit l'atténuation linéique de puissance du signal entre le point d'entrée du câble coaxial en $z = 0$ et un point d'abscisse z par la grandeur A , exprimée en décibel par unité de longueur, $A = \frac{10}{z \ln 10} \cdot \ln\left(\frac{P(z=0)}{P(z)}\right)$. Exprimer A en fonction de ρ et Z_c .

65. Montrer que si $\rho \gg \Lambda\omega$ alors $A = \frac{10}{\ln 10} \sqrt{2\rho\Gamma\omega}$.

→ Ainsi, au vu de cette relation et de celle de la question 64, il semble que l'atténuation linéique de puissance progresse avec la fréquence puis devienne indépendante de celle-ci lorsque les effets inductifs prennent le pas sur les effets résistifs. Mais, en réalité, à cause d'un **phénomène** associé à la résistance, en haute fréquence, ρ augmente avec la racine carrée de la fréquence. On se propose de démontrer ce fait à partir de l'étude des pertes dans l'âme du câble.

V-B- Effet de peau dans les métaux - Bilan énergétique (4,5 pts).

On commence par s'intéresser à la répartition de la densité volumique du courant $\vec{j}(r, t)$ et du champ électrique $\vec{E}(r, t)$ dans un simple fil conducteur plein et cylindrique, ayant une conductivité $\gamma = 5.7 \cdot 10^7 \text{ S.m}^{-1}$, un rayon a et une grande longueur l . Le fil transporte (dans l'ARQS) un courant d'intensité complexe $\underline{i}(t) = I_0 \exp(j\omega t)$.

On cherche, d'abord, à déterminer $\vec{E}(r, t) = \underline{E}(r) \exp(j\omega t) \vec{u}_z$ à l'intérieur du fil.

66. Quelle simplification peut-on faire dans l'équation Maxwell-Ampère ?

Jusqu'à quelle fréquence cette approximation est-elle justifiée ? Commenter.

Dorénavant, on suppose cette approximation valide.

67. Montrer que le métal est localement neutre (On note q_v la densité volumique de charge).

68. On rappelle que $\vec{\nabla}(F\vec{u}_z) = (\Delta F)\vec{u}_z$. Etablir l'équation $\frac{d^2 \underline{E}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\underline{E}}{dr} = \frac{2j}{\delta^2} \underline{E}$ (3) on exprimera δ en fonction de γ , ω et μ_0 .

On suppose que dans le cuivre et aux fréquences de travail, $\delta \ll a$. Ce qui permet de négliger le terme $\frac{1}{r} \frac{d\underline{E}}{dr}$ dans l'équation (3), d'où $\underline{E}(r)$ vérifie l'équation $\frac{d^2 \underline{E}}{dr^2} = \frac{2j}{\delta^2} \underline{E}$ (4)

69. Résoudre (4) et montrer que $\underline{E}(r) \equiv C_1 \exp((1+j)\frac{r-a}{\delta})$ où C_1 est une constante.

70. Calculer δ pour $f = 10 \text{ MHz}$. L'hypothèse précédente est-elle justifiée ?

71. Montrer que $C_1 \equiv I_0 \frac{1+j}{\gamma 2\pi a \delta}$. On donne $\int_0^y x e^{\beta x} dx = \frac{y e^{\beta y}}{\beta} - \frac{1}{\beta^2} (e^{\beta y} - 1)$.

72. Représenter l'allure des variations de $|j(r)|$ pour $f = 10 \text{ MHz}$. Commenter.

73. Déterminer la puissance moyenne $\langle dP_{ame} \rangle$ cédée par le champ aux charges de la portion située entre les abscisses z et $z + dz$ du conducteur.

74. En déduire que la résistance linéique de celui-ci s'écrit $\rho = \frac{1}{\gamma 2\pi a \delta}$.

75. D'après 72 et 74, nommer et expliquer le phénomène physique correspondant.

Pour tenir compte de la dissipation dans l'âme et la gaine, on suppose maintenant que l'onde de courant dans l'âme est de la forme $\underline{i}(z, t) = I_0(z) \exp(j(\omega t - kz))$ où $I_0(z)$ est une fonction réelle positive décroissante.

76. Montrer que la puissance moyenne $\langle dP_j \rangle$ dissipée par effet Joule dans le tronçon du câble compris entre les abscisses $z, z + dz$ s'écrit $\langle dP_j \rangle = \frac{1}{2} \frac{I_0^2(z)}{\gamma 2\pi \delta} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) dz$.

77. On peut vérifier que $\left| \frac{E_{zmax}}{E_{rmax}} \right| \ll 1$, d'où le résultat obtenu à la question 21 reste valable. Soit $\langle P_{ray}(z, t) \rangle = \frac{\mu_0 c}{4\pi \sqrt{\epsilon_r}} I_0^2(z) \ln\left(\frac{b}{a}\right)$. Par un bilan de puissance dans le tronçon

$[z, z + dz]$ du câble montrer que $\frac{dI_0(z)}{dz} + \frac{1}{l_c} I_0(z) = 0$ avec $l_c = \frac{2\delta \gamma}{\epsilon_0 c \sqrt{\epsilon_r}} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$.

78. Interpréter cette grandeur. Existe-t-il une valeur de $\frac{b}{a}$ qui maximise l_c à ω fixée ?

79. Comparer avec les valeurs données de a et b . Calculer l_c pour $f = 10 \text{ MHz}$.

80. Citer quelques avantages et inconvénients du câble coaxial.

81. Donner un exemple d'un autre support de distribution des signaux.

***** **Fin de l'épreuve** *****