Institut Préparatoire
Aux Etudes d'Ingénieurs
De Sfax

Année universitaire 2018 – 2019

MP2

Décembre 2018

Devoir de Synthèse n.1 (Analyse)

Exercice. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & \text{si} \quad n|x| \geq 1, \\ n\cdot x & \text{si} \quad n|x| < 1. \end{cases}$$

1) Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f que l'on précisera.
2) La suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge –t–elle uniformément sur $\mathbb{R}$? Justifier votre réponse.

Problème1. On considère l'espace vectoriel

$$E = \Big\{ U = (U_n)_{n\geq 0} \quad \text{tels que} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ U_n \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 0} U_n^2 \quad \text{converge} \Big\}$$

Si $U = (U_n)_{n\geq 0}$ élément de E, On pose $N(U) = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} U_n^2\Big)^{\frac{1}{2}}$.

1. Montrer que si $U = (U_n)_{n\geq 0}$ et $V = (V_n)_{n\geq 0}$ sont deux éléments de E, alors la série $\sum_{n\geq 0} U_n V_n$ est convergente.
2. Montrer que N définit une norme sur E.
3. Pour $U \in E$, on pose $\| U \|_\infty = \sup_{n\in N} |U_n|$. Montrer que $\| \cdot \|_\infty$ définit une norme sur E.
4. On considère une suite de réels positifs $A = (a_n)_{n\geq 0}$ élément de E et telle que la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ est divergente. On défnit l'application T_a par

$$\forall U \in E, \qquad T_a(U) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n U_n$$

   (a) Montrer que T_a est continue sur (E, N).
   (b) Montrer que si l'application T_a est continue sur $(E, \| \cdot \|_\infty)$ alors il existe une constante réelle $M > 0$ telle que $\forall p \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=0}^{n=p} a_n \leq M.$
   (c) En déduire que les deux normes $\| \cdot \|_\infty$ et N ne sont pas équivalentes dans E.
5. On considère la partie

$$\mathcal{F} = \{U = (U_n)_{n\geq 0} \in E;\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{U_n}{n+1} \geq 1\}$$

   (a) Vérifier que la partie $\mathcal{F}$ n'est pas vide.
   (b) Justifier que $\mathcal{F}$ est une partie fermée dans (E, N).
   (c) Montrer que $\mathcal{F}$ n'est pas une partie compacte de (E, N).

Problème2.

. On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ munie de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ la suite de fonctions de E définie par

$$\forall x \in [0,1], \qquad f_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x f_n(t-t^2)dt.$$

Partie 1.

1) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in [0,1] \qquad 0 \leq f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \tag{1}$$

2) En déduire que la suite (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f.

3) Utiliser la relation (1) pour montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall p \in \mathbb{N}, \qquad \|f_{n+p} - f_n\|_\infty \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \tag{2}$$

4) En déduire que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers f.

5) Prouver qu'au voisinage de $+\infty$,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = o\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

6) Déduire de ce qui précède que la série $\sum_{n\geq 0}(f - f_n)$ converge uniformément sur $[0,1]$.

Partie 2 : Quelques propriétés de f.

1) Justifier que f est une fonction continue sur $[0,1]$.

2) Montrer en utilisant la relation (2) que la suite (f_n) est bornée dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$ par e.

3) En déduire que

$$\forall x \in [0,1], \quad |f(x)| \leq e.$$

4) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$,

$$f(x) = 1 + \int_0^x f(t-t^2)dt.$$

5) En déduire que f est dérivable sur $[0,1]$.

6) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$.