Institut Préparatoire
aux Études d'Ingénieurs de Sfax

Année universitaire 2018-2019
Section: MP 2

Devoir de contrôle d'analyse n. 1

Durée: 1 heure

Exercice 1.

1) Soient $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue par morceaux sur $[a, +\infty[$. Pour $x \geq a$, on pose: $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt$. On considère les propositions suivantes:

(i) f est intégrable sur $[a, +\infty[$.

(ii) F admet une limite finie quand $x \to +\infty$.

Donner, sans démonstration, toutes les implications possibles entre (i) et (ii) lorsque:

(a) f est positive sur $[a, +\infty[$.

(b) f ne garde pas un signe constant.

2) On considère h la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $h(t) = \dfrac{\sin t}{t}$.

(a) Démontrer que la fonction H définie par $H(x) = \displaystyle\int_1^x h(t)\, dt$ admet une limite finie quand $x \to +\infty$.

(b) En considérant la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |h(t)|\, dt$, démontrer que h n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.

Exercice 2.

1) On désigne par Φ_x la fonction définie par $\Phi_x(t) = \dfrac{t^x}{1+t}$. Déterminer l'ensemble D des réels x, pour les quels Φ_x est intégrable sur $]0, 1]$.

2) Soit $x \in D$.

(a) Vérifier que pour tout $n \geq 1$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\, dt = \sum_{k=0}^{n-1} \Big(\int_0^1 (-1)^k t^{k+x}\, dt \Big) + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+x}}{1+t}\, dt.$

(b) En déduire que

$$\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x}.$$

3) Soit $x \in D$. On pose

$$I(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,dt \qquad \text{et} \qquad J(x) = \int_0^1 t^{x-1}\,\mathbf{Log}\,(1+t)\,dt.$$

Montrer que

$$xJ(x) = \Big(\mathbf{Log}\,2\Big) - I(x).$$

4) En remarquant que pour tout $x \neq -1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k x^k = \frac{1}{1+x} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{1+x}$,

montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \mathbf{Log}\,2.$$

5) Déduire de ce qui précède que pour tout $x \in D$,

$$\int_0^1 t^{x-1}\,\mathbf{Log}\,(1+t)\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+x)}.$$

6) On se donne un réel $a \in [-1,1[$.

(a) Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{a^n}{n}$.

(b) Démontrer qu'au voisinage de $+\infty$,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a^k}{k} = \mathrm{o}\,(a^n).$$

$\Big($ On pourra distinguer les trois cas: $a = -1$, $a \in]-1,0[$ et puis $a \in [0,1[$. $\Big)$