Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieur de Sfax

IPEIS

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE PHYSIQUE DU SECOND SEMESTRE

MP2 – T2

27 Mai 2019

Durée : 4h

Problème I : Transfert Thermique

A. Étude des fusibles en céramiques

1°/ La conduction thermique est régie par la loi de Fourier : La densité de flux thermique est proportionnelle au gradient de température.

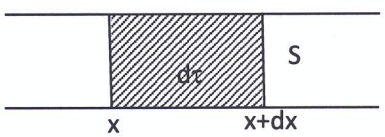
$\vec{J}_{th} = -\lambda \overrightarrow{grad(T)}$

λ est une constante positive appelée conductivité thermique. Cette constante ne dépend que de la nature du milieu.

Dans le système international :

J_{th} s'exprime en $W.m^{-2}$ et λ s'exprime en $W.m^{-1}.K^{-1}$.

2°/ Bilan thermique pour un élément de volume du fil métallique :



$$\left[J_{th}(x)S - J_{th}(x+dx)S\right]dt + \frac{dx}{\sigma S} I^2 dt = \mu S dx C dT$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial J_{th}}{\partial x} S dx dt + \frac{dx}{\sigma S} I^2 dt = \mu S dx C dT$$

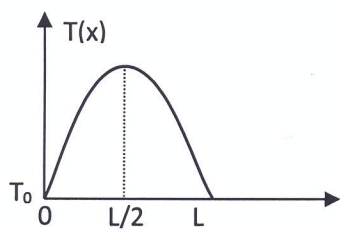
$$\Rightarrow \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{\sigma S^2} I^2 = \mu C \frac{\partial T}{\partial t}$$

3°/ En régime stationnaire $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ Donc $\lambda \frac{d^2T}{dx^2} + \frac{1}{\sigma S^2} I^2 = 0$

$$T(x) = -\frac{I^2}{2\lambda\sigma S^2} x^2 + Ax + B$$

Conditions aux limites : $\begin{vmatrix} T(0) = T_0 \\ T(L) = T_0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} B = T_0 \\ A = \frac{LI^2}{2\lambda\sigma S^2} \end{vmatrix}$

Ainsi : $T(x) = T_0 + \frac{I^2}{2\lambda\sigma S^2}(Lx - x^2)$



La température est maximale en x=L/2

4°/ La fusion débute au point où la température est maximale et atteint T_{fusion} en premier en x_f=L/2

B. Étude des fusibles en verre

5°/

La convection thermique est régie par la loi de Newton : La densité de flux thermique est proportionnelle à l'écart de température.

$\vec{J}_{th-conv} = -h\left(T_p - T_f\right)\vec{n}$

T_p est la température de la paroi solide

T_f est la température du fluide

$\vec{n}$ est un vecteur unitaire normal à la surface d'échange orienté du solide vers le fluide

h est le coefficient de transfert thermique par convection.

Dans le système international :

$J_{th-conv}$ s'exprime en $W.m^{-2}$ et h s'exprime en $W.m^{-2}.K^{-1}$.

6°/

$[B_i] = \dfrac{[h][D]}{[\lambda]}$ or d'après 5°/ $[h] = [\lambda][L]$ donc B_i est un nombre adimensionnel

Le nombre de Biot caractérise le rapport des transferts thermiques convectif et conductifs au sein d'un solide (rapport du transfert thermique à la surface sur le transfert thermique à l'intérieur du solide)

7°/

$D \sim 0{,}1mm$; $h \sim 10\ W.m^{-2}.K^{-1}$; $\lambda > 10\ Wm^{-1}K^{-1}$ pour un fil métallique

Donc $B_i < 10^{-4} << 1$ (la conductivité thermique du plomb est $\lambda = 35{,}3SI$)

8°/

Bilan thermique en régime stationnaire pour un élément de volume du fil métallique :

$$\left[J_{th}(x) - J_{th}(x+dx)\right]\frac{\pi D^2}{4} - \pi Dh\left(T(x) - T_0\right)dx + \frac{4dx}{\sigma\pi D^2}I^2 = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{dJ_{th}}{dx}\frac{\pi D^2}{4}dx - \pi Dh\left(T(x) - T_0\right)dx + \frac{4I^2}{\sigma\pi D^2}dx = 0$$

$$\Rightarrow \lambda\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{4h}{D}\left(T(x) - T_0\right) + \frac{16I^2}{\sigma\pi^2 D^4} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2T}{dx^2} = \frac{4h}{\lambda D}\left(T(x) - T_0 - \frac{4I^2}{\sigma h\pi^2 D^3}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2T}{dx^2} = k^2\left(T(x) - T_0 - T_1\right);\ T_1 = \frac{4I^2}{\sigma h\pi^2 D^3} \text{ et } k = \sqrt{\frac{4h}{\lambda D}}$$

9°/

En posant $\theta(x) = T(x) - T_0 - T_1$, on obtient $\dfrac{d^2\theta}{dx^2} = k^2\theta$

La solution de cette équation différentielle est de la forme :

$\theta(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx}$

Conditions aux limites :

$$\begin{cases}\theta(0) = -T_1 \\ \theta(L) = -T_1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A + B = -T_1 \\ Ae^{kL} + Be^{-kL} = -T_1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A = -\dfrac{T_1}{2}\dfrac{1-e^{-kL}}{sh(kL)} \\ B = \dfrac{T_1}{2}\dfrac{1-e^{kL}}{sh(kL)}\end{cases}$$

$$T(x) = T_0 + T_1 - \frac{T_1}{2}\frac{1-e^{-kL}}{sh(kL)}e^{kx} + \frac{T_1}{2}\frac{1-e^{kL}}{sh(kL)}e^{-kx}$$

10°/

$$T(x) = T_0 + T_1 - \frac{T_1}{2sh(kL)}\left[e^{kx} - e^{k(x-L)} - e^{-kx} + e^{-k(x-L)}\right]$$

	$\Rightarrow T(x)=T_0+T_1-\frac{T_1}{2sh(kL)}\left[e^{k\frac{L}{2}}\left(e^{k\left(x-\frac{L}{2}\right)}+e^{-k\left(x-\frac{L}{2}\right)}\right)-e^{-k\frac{L}{2}}\left(e^{k\left(x-\frac{L}{2}\right)}+e^{-k\left(x-\frac{L}{2}\right)}\right)\right]$ $\Rightarrow T(x)=T_0+T_1-\frac{2T_1sh\left(k\frac{L}{2}\right)}{sh(kL)}ch\left(k\left(x-\frac{L}{2}\right)\right)$ or $sh(kL)=2ch(kL)sh(kL)$ Donc $T(x)=T_0+T_1-T_1\frac{ch\left(k\left(x-\frac{L}{2}\right)\right)}{ch(kL)}=T_0+T_1\left(1-\frac{ch\left(k\left(x-\frac{L}{2}\right)\right)}{ch(kL)}\right)$	
11°/	Dans cette étude, nous avons négligé le phénomène de transfert thermique par rayonnement. Le rayonnement thermique est régi par la loi de Stefan. La densité de flux thermique rayonnée par un corps noir est proportionnelle à la puissance quatrième de la température. $j_{th-ray}=\sigma_S T^4$ σ_S est la constante de Stefan qui s'exprime dans le système international en $Wm^{-2}K^{-4}$	

C. Temps de réponse d'un fusible en verre

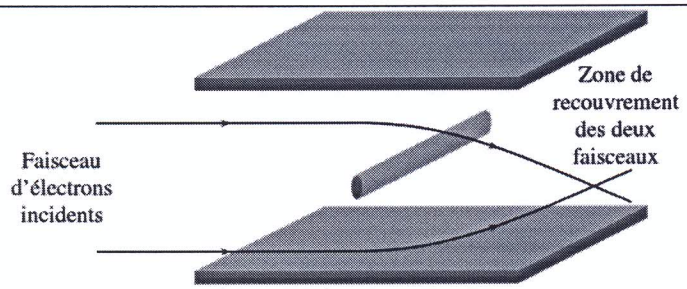
12°/	La puissance cédée par convection de la part du fil métallique à l'air extérieur est : $P_{conv}=h\pi DL(T-T_0)$ Bilan thermique du fil métallique : $-P_{conv}+R_{élec}I^2=\mu C\pi\frac{D^2}{4}L\frac{dT}{dt}\Rightarrow -h\pi DL(T-T_0)+\frac{4L}{\sigma\pi D^2}I^2=\mu C\pi\frac{D^2}{4}L\frac{dT}{dt}$ $\Rightarrow \frac{dT}{dt}+\frac{4h}{\mu CD}T=\frac{4h}{\mu CD}T_0+\frac{16}{\mu C\sigma\pi^2D^4}I^2$ $\Rightarrow \frac{dT}{dt}+\frac{4h}{\mu CD}T=\frac{4h}{\mu CD}\left(T_0+\frac{4}{\sigma h\pi^2D^3}I^2\right)$ $\Rightarrow \frac{dT}{dt}+\frac{T}{\tau}=\frac{T_2}{\tau}$ Avec $\tau=\frac{\mu CD}{4h}$ et $T_2=T_0+\frac{4I^2}{\sigma h\pi^2D^3}$	
13°/	La température maximale correspond à : $T_{max}=T_{permanent}=T_2$ A.N. : $T_2=293+\frac{4\times10^2}{10\times3,77\times10^7\times(3,14)^2\times\left(64\times10^{-6}\right)^3}=4,1\times10^5K$ T_2 est très élevée, Le fil du fusible risque de fondre. Le rapport de puissance thermique par convection sur la puissance cédée par effet Joule est : $\frac{P_{conv}}{P_{élec}}=\frac{h\pi LD(T_{fusion}-T_0)}{\frac{4L}{\sigma\pi D^2}I_1^2}=\frac{\sigma h\pi^2D^3(T_{fusion}-T_0)}{4I_1^2}$ A.N. : $\frac{P_{conv}}{P_{élec}}=1,6.10^{-4}<<1$ donc les pertes par convection sont négligeables (La température de fusion du plomb est $T_{fusion}=600,7K$)	

14°/	D'après 12°/ et en négligeant la convection, on obtient : $\frac{dT}{dt} = \frac{16}{\mu C \sigma \pi^2 D^4} I_1^2$ $\Rightarrow T = \frac{16 I_1^2}{\mu C \sigma \pi^2 D^4} t + cte$ À l'instant t=0 ; $T = T_0 \Rightarrow cte = T_0$ D'où $T = \frac{16 I_1^2}{\mu C \sigma \pi^2 D^4} t + T_0$ La fusion commence à l'instant t_1 / $T_{fusion} = \frac{16 I_1^2}{\mu C \sigma \pi^2 D^4} t_1 + T_0$ $t_1 = \frac{\mu C \sigma \pi^2 D^4}{16 I_1^2} (T_{fusion} - T_0)$ A.N. : $t_1 = 6,4\ 10^{-3} s = 6,4 ms$	
15°/	Une fois la température de fusion est atteinte, l'énergie cédée par effet Joule sert à faire changer l'état pendant la durée t_2. $P_{élec}.t_2 = m.\Delta H_{fusion}$ $\Rightarrow t_2 = \frac{m.\Delta H_{fusion}}{P_{élec}} = \frac{\mu \sigma \pi^2 D^4}{16 I_1^2} \Delta H_{fusion}$ A.N. : Pour l'aluminium $t_2 = 4,5$ ms D'où la durée totale est : $t_{total} = t_1 + t_2 = 10,9$ ms Le fusible est alors de type T	
16°/	- Le temps de fusion complète est une fonction décroissante de l'intensité de courant. - Le temps devient très important lorsque l'intensité tend vers sa valeur nominale. - D'après les courbes : • pour I_n=1A ; le temps de fusion est de l'ordre de 15ms → type T • pour I_n=10A ; le temps de fusion est de l'ordre de 35ms → type T • pour I_n=100A ; le temps de fusion est de l'ordre de 250ms → type TT Lorsque l'intensité I_n augmente le fusible devient de plus lent	

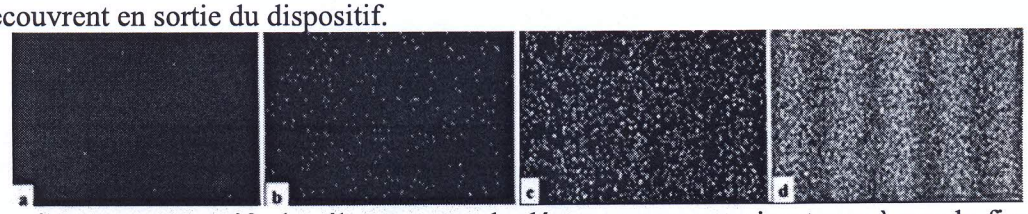
Problème II : Mécanique Quantique

1. Onde de De Broglie (20pts)

1.1	En mécanique classique, qui s'intéresse aux objets macroscopiques. Les grandeurs physiques telle que l'énergie, la position et la vitesse sont des grandeurs continues. Ce qui n'est pas le cas à l'échelle atomique et subatomique où la mécanique quantique fondée sur la théorie des quanta, qui énonce que les variations d'une grandeur physique ne se font que par des multiples d'une unité Les faits physiques qui ont conduit à développer la mécanique quantique sont : ▪ Le rayonnement des corps noir ; ▪ L'effet photoélectrique ; ▪ L'effet Compton …etc.	
1.2.	Expérience d'interférence avec des électrons	



Dispositif interférentiel à deux voies, utilisé par Tonomura en 1989, pour des électrons : un système d'électrodes divise le faisceau électronique ; les deux faisceaux déviés se recouvrent en sortie du dispositif.



Les impacts successifs des électrons sur le détecteur reconstruisent peu à peu la figure d'interférence à deux ondes. (a) : 8 électrons détectés ; (b) : 270 ; (c) :2000 ; (d) : 60000.

1.3. A une particule matérielle de quantité de mouvement p, est associée une onde de longueur d'onde : $\lambda_{DB} = \frac{h}{p}$ (Relation de De Broglie)

1.4. D'après le théorème de la variation de l'énergie cinétique on a :

$$\frac{1}{2}m_e{v_e}^2 = eU_a \implies v_e = \sqrt{\frac{2eU_a}{m_e}} = 5{,}66.10^5\sqrt{U_a}\ m.s^{-1}$$

1.5.

$$\lambda_e = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_e v_e} = \frac{1}{\sqrt{2m_e e}}\frac{1}{\sqrt{U_a}}$$

AN :

$$U_{a1} = 1\ kV \implies \lambda_{e1} = 38{,}7pm \approx \lambda_1$$
$$U_{a2} = 100\ kV \implies \lambda_{e2} = 3{,}87pm \approx \lambda_2$$
$$U_{a3} = 1\ MV \implies \lambda_{e3} = 0{,}0387pm \neq \lambda_3$$

Dans le dernier cas, la mécanique classique n'est plus valable. En effet, un calcul classique conduit à une vitesse $v_e = 5{,}66.10^5\sqrt{U_a}\ m.s^{-1} = 5{,}66.10^8 m.s^{-1}$ supérieure à la vitesse de la lumière.

1.6. Pour étudier la propagation des ondes de matière, Schrödinger a introduit un champ scalaire $\underline{\psi}(M,t)$ appelé fonction d'onde.

1.7. La probabilité de présence de la particule à l'instant t, entre x et x + dx, est donnée par :

$$d\mathcal{P} = \left|\underline{\psi}(x,t)\right|^2 dx$$

$\left|\underline{\psi}(x,t)\right|^2 = \frac{d\mathcal{P}}{dx}$ représente la densité linéique de probabilité de présence.

Condition de normalisation :

La probabilité de trouver la particule dans tout l'espace est égale à l'unité.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\underline{\psi}(x,t)\right|^2 dx = 1$$

1.8. L'équation de Schrödinger vérifiée par $\underline{\psi}(x,t)$ s'écrit :

$$i\hbar\frac{\partial\underline{\psi}(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\underline{\psi}(x,t)}{\partial x^2} + V(x)\underline{\psi}(x,t)$$

Multiplions cette équation par la fonction d'onde conjuguée $\underline{\psi}^*(x,t)$.

$$i\hbar\underline{\psi}^*(x,t)\frac{\partial\underline{\psi}(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\underline{\psi}^*(x,t)\frac{\partial^2\underline{\psi}(x,t)}{\partial x^2} + V(x)\underline{\psi}^*(x,t)\underline{\psi}(x,t) \quad (1)$$

Multiplions maintenant la fonction d'onde conjuguée $\underline{\psi}^*(x,t)$ par l'équation conjuguée de celle de Schrödinger.

$$-i\hbar\underline{\psi}(x,t)\frac{\partial\underline{\psi}^*(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\underline{\psi}(x,t)\frac{\partial^2\underline{\psi}^*(x,t)}{\partial x^2} + V(x)\underline{\psi}(x,t)\,\underline{\psi}^*(x,t) \quad (2)$$

(1) − (2) donne :

$$i\hbar\left(\underline{\psi}^*\frac{\partial\underline{\psi}}{\partial t} + \underline{\psi}\frac{\partial\underline{\psi}^*}{\partial t}\right) = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\underline{\psi}^*\frac{\partial^2\underline{\psi}}{\partial x^2} - \underline{\psi}\frac{\partial^2\underline{\psi}^*}{\partial x^2}\right)$$

Soit:

$$\frac{\partial\underline{\psi}\,\underline{\psi}^*}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m}\left(\underline{\psi}^*\frac{\partial^2\underline{\psi}}{\partial x^2} - \underline{\psi}\frac{\partial^2\underline{\psi}^*}{\partial x^2}\right) \quad (3)$$

Le premier terme de cette équation $\frac{\partial\underline{\psi}\,\underline{\psi}^*}{\partial t} = \frac{\partial\rho}{\partial t}$

Le second terme $\frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial}{\partial x}\left(\underline{\psi}^*\frac{\partial\underline{\psi}}{\partial x^2} - \underline{\psi}\frac{\partial\underline{\psi}^*}{\partial x^2}\right) = ?$

$$\vec{J}(x,t) = \frac{i\hbar}{2m}\left(\underline{\psi}\frac{\partial\underline{\psi}^*}{\partial x} - \underline{\psi}^*\frac{\partial\underline{\psi}}{\partial x}\right)\vec{e}_x$$

$$\frac{\partial J}{\partial x} = \frac{i\hbar}{2m}\left(\frac{\partial\underline{\psi}}{\partial x}\frac{\partial\underline{\psi}^*}{\partial x} + \underline{\psi}\frac{\partial^2\underline{\psi}^*}{\partial x^2} - \frac{\partial\underline{\psi}^*}{\partial x}\frac{\partial\underline{\psi}}{\partial x} - \underline{\psi}^*\frac{\partial^2\underline{\psi}}{\partial x^2}\right)$$

$$\frac{\partial J}{\partial x} = \frac{i\hbar}{2m}\left(\underline{\psi}\frac{\partial^2\underline{\psi}^*}{\partial x^2} - \underline{\psi}^*\frac{\partial^2\underline{\psi}}{\partial x^2}\right)$$

D'où la relation cherchée :

$$\boxed{\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial J(x,t)}{\partial x} = 0} \quad (4)$$

Cette équation est formellement identique à l'équation de conservation de charge rencontrée en électrocinétique. Elle traduit la conservation de la probabilité de présence de la particule.

En régime stationnaire$\rho(x,t) = \rho(x)$. La relation 4 donne $\frac{\partial J(x,t)}{\partial x} = \text{div}\,(\vec{J}) = 0$.

Le vecteur courant de probabilité est à flux conservatif.

1.9.

$$\vec{J}(x,t) = \frac{i\hbar}{2m}\left(\underline{\psi}\frac{\partial\underline{\psi}^*}{\partial x} - \underline{\psi}^*\frac{\partial\underline{\psi}}{\partial x}\right)\vec{e}_x$$

$$\underline{\psi}(x,t) = A\exp(if(x,t)) \Rightarrow \frac{\partial\underline{\psi}}{\partial x} = iA\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\exp(if(x,t))$$

$$\underline{\psi}^*(x,t) = A^*\exp(-if(x,t)) \Rightarrow \frac{\partial\underline{\psi}^*}{\partial x} = -iA^*\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\exp(-if(x,t))$$

D'où :

$$\vec{J}(x,t) = \frac{i\hbar}{2m}\left(-i|A|^2\frac{\partial f(x,t)}{\partial x} - -i|A|^2\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\right)\vec{e}_x$$

$$\boxed{\vec{J}(x,t) = \frac{\hbar}{m}|A|^2\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\vec{e}_x}$$

1.10. Pour une particule libre $V(x) = 0$

L'équation de Schrödinger vérifiée par $\underline{\psi}(x,t)$ s'écrit :

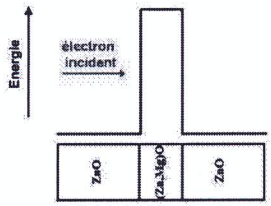
$$i\hbar\frac{\partial\underline{\psi}(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\underline{\psi}(x,t)}{\partial x^2}$$

Remplaçons $\underline{\psi}(x,t) = A\exp(-i(\omega t - kx))$ dans l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar\left(-i\omega\underline{\psi}\right) = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(-k^2\underline{\psi}\right)$$

	$$\left(\hbar\omega - \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\right)\underline{\psi} = 0$$ Cette égalité est valable quel que soit $\underline{\psi}(x,t)$. D'où la relation $\boxed{\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}}$ dite relation de dispersion. Pour une particule libre, l'énergie est purement cinétique. Soit : $$E = \frac{p^2}{2m}$$ Or $$p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$$ D'où : $$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$ Soit : $$\boxed{E = \hbar\omega}$$ La normalisation d'une onde plane progressive monochromatique est impossible. En effet : $$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\underline{\psi}(x,t)\right|^2 dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 dx = 1 \Rightarrow A^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx = 1$$ L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} dx$ est infinie. La normalisation est donc impossible. Ceci est dû au fait qu'une OPPM est illimitée dans le temps et dans l'espace. Une OPPM ne représente pas donc une réalité physique. Elle ne peut pas décrire une particule.	
1.11.	D'après 1.9., on a $\vec{J}(x,t) = \frac{\hbar}{m}\|A\|^2 \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\vec{e}_x$ avec $f(x,t) = -(\omega t - kx)$. D'où : $$\vec{J}(x,t) = \frac{\hbar k}{m}\|A\|^2\vec{e}_x = \left|\underline{\psi}(x,t)\right|^2 \frac{\hbar}{m}\vec{k}$$	

2. Barrière de potentiel

2.1/	* Une structure de semi-conducteurs ZnO/(Zn,Mg)O/ZnO peut être modélisée par une barrière de potentiel  	
2.2/	La région $0 < x < a$ est inaccessible au sens de la mécanique classique.	
2.3.1/	$0 < E < V_0$ Dans les régions (I) et (III), où $V(x) = 0$, la fonction $\underline{\varphi}(x)$ est régie par l'équation différentielle : $$\frac{d^2\underline{\varphi}(x)}{dx^2} + k^2\underline{\varphi}(x) = 0 \quad \text{où } k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$ Les solutions de cette équation est de la forme : $$\underline{\varphi_1}(x) = A_1\exp(ikx) + B_1\exp(-ikx)$$ $$\underline{\varphi_3}(x) = A_3\exp(ikx) + B_3\exp(-ikx)$$	

	Dans la région (II), où $V(x) = V_0 > E$, la fonction $\underline{\varphi}(x)$ est régie par l'équation différentielle : $$\frac{d^2\underline{\varphi}(x)}{dx^2} - \gamma^2\underline{\varphi}(x) = 0 \quad \text{où } \gamma = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)}$$ La solution de cette équation est de la forme : $$\underline{\varphi_2}(x) = A_2\exp(\gamma x) + B_2\exp(-\gamma x)$$	
2.3.2/	L'absence de particule incidente venant de $+\infty$ impose $B_3 = 0$. Soit : $$\underline{\varphi_3}(x) = A_3\exp(ik_1 x)$$	
2.3.3/	$$\begin{cases} \vec{J}_i = \lvert A_1\rvert^2 \frac{\hbar}{m} k\vec{e}_x \\ \vec{J}_r = -\lvert B_1\rvert^2 \frac{\hbar}{m} k\vec{e}_x \\ \vec{J}_t = \lvert A_3\rvert^2 \frac{\hbar}{m} k\vec{e}_x \end{cases}$$	
2.3.4/	$R = \frac{\lVert\vec{J}_r\rVert}{\lVert\vec{J}_i\rVert} = \frac{\lvert B_1\rvert^2}{\lvert A_1\rvert^2}$; $T = \frac{\lVert\vec{J}_t\rVert}{\lVert\vec{J}_i\rVert} = \frac{\lvert A_3\rvert^2}{\lvert A_1\rvert^2}$	
2.3.5/	La continuité de $\underline{\varphi}$ et de $\underline{\varphi}'$ en $x = 0$ et $x = a$ donnent : $$\begin{cases} A_1 + B_1 = A_2 - B_2 \\ ik(A_1 - B_1) = -\gamma(A_2 + B_2) \\ A_2\exp(\gamma a) + B_2\exp(-\gamma a) = A_3\exp(ika) \\ \gamma\left(A_2\exp(\gamma a) - B_2\exp(-\gamma a)\right) = ikA_3\exp(ika) \end{cases}$$	
2.3.6/	$R = \frac{\lvert B_1\rvert^2}{\lvert A_1\rvert^2} = \left(\frac{B_1}{A_1}\right)\left(\frac{B_1}{A_1}\right)^*$; $T = \frac{\lvert A_3\rvert^2}{\lvert A_1\rvert^2} = \left(\frac{A_3}{A_1}\right)\left(\frac{A_3}{A_1}\right)^*$	
2.3.7/	Nous pouvons vérifier aisément que $R + T = 1$. Comme dans le cas de la marche de potentiel, ce résultat exprime la conservation de la probabilité de présence : une particule quantique est réfléchie ou transmise par la barrière.	
2.3.8/	- Cas d'une barrière mince : $\gamma a \ll 1$ $\text{sh}(\gamma a) \approx \gamma a$ • $R = \frac{\frac{V_0^2}{4E(V_0-E)}\text{sh}^2(\gamma a)}{1+\frac{V_0^2}{4E(V_0-E)}\text{sh}^2(\gamma a)} \approx \frac{\frac{V_0^2}{4E(V_0-E)}(\gamma a)^2}{1+\frac{V_0^2}{4E(V_0-E)}(\gamma a)^2}$ $\Rightarrow R \approx \frac{\frac{V_0^2}{4E(V_0-E)}\frac{2m}{\hbar^2}(V_0-E)a^2}{1+\frac{V_0^2}{4E(V_0-E)}\frac{2m}{\hbar^2}(V_0-E)a^2} = \frac{\frac{mV_0^2}{2\hbar^2E}a^2}{1+\frac{mV_0^2}{2\hbar^2E}a^2} \to 0$ • $T = \frac{1}{1+\frac{V_0^2}{4E(V_0-E)}\text{sh}^2(\gamma a)} \approx \frac{1}{1+\frac{V_0^2}{4E(V_0-E)}(\gamma a)^2}$ $\Rightarrow T \approx \frac{1}{1+\frac{V_0^2}{4E(V_0-E)}\frac{2m}{\hbar^2}(V_0-E)a^2} = \frac{1}{1+\frac{mV_0^2}{2\hbar^2E}a^2} \to 1$ - cas d'une barrière épaisse $(\gamma a \gg 1)$; $\text{sh}(\gamma a) = \frac{1}{2}e^{\gamma a}$	

- $R=\dfrac{\dfrac{V_0^2}{4E(V_0-E)}\text{sh}^2(\gamma a)}{1+\dfrac{V_0^2}{4E(V_0-E)}\text{sh}^2(\gamma a)}\approx\dfrac{\dfrac{V_0^2}{16E(V_0-E)}e^{2\gamma a}}{1+\dfrac{V_0^2}{16E(V_0-E)}e^{2\gamma a}}\to 1$
- $T=\dfrac{1}{1+\dfrac{V_0^2}{4E(V_0-E)}\text{sh}^2(\gamma a)}$

$$\Rightarrow T\approx\frac{1}{1+\dfrac{V_0^2}{16E(V_0-E)}e^{2\gamma a}}=\frac{16E(V_0-E)}{V_0^2}e^{-2\gamma a}=16\frac{E}{V_0}\left(1-\frac{E}{V_0}\right)e^{-2\gamma a}$$

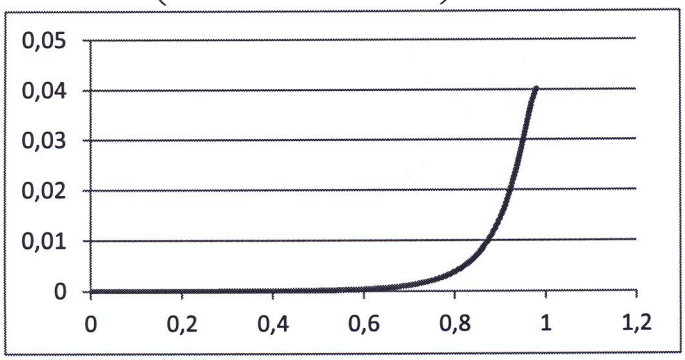
Contrairement à la mécanique classique le coefficient de transmission peut être différent de 0 pour $0<E<V_0$

2.3.9/ cas d'une barrière épaisse $(\gamma a>>1)$

$$\Rightarrow T\approx 16\frac{E}{V_0}\left(1-\frac{E}{V_0}\right)e^{-2\gamma a}=16\frac{E}{V_0}\left(1-\frac{E}{V_0}\right)\exp\left(-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(V_0-E)}\,a\right)$$

$$\Rightarrow T=16X(1-X)\exp\left(-\frac{2a\sqrt{2mV_0}}{\hbar}\sqrt{(1-X)}\right);\ X=\frac{E}{V_0}$$

$$\Rightarrow T\approx T_0\exp\left(-\frac{2a\sqrt{2mV_0}}{\hbar}\sqrt{(1-X)}\right);\ T_0=16X(1-X)$$



Variation de T pour un électron au sein d'une barrière de 2eV

T est une fonction croissante de X. Elle s'annule pour $X=0$

A.N. : $V_0=2eV$; $E=1eV$ et $a=1nm$

Le coefficient de transmission pour :

- un électron : $T=1{,}38.10^{-4}$
- un proton : $T\approx 0$

T est plus importante si la masse est plus faible. Les effets quantiques sont plus marqués pour les particules les moins massives

L'hypothèse $\gamma a>>1 \Rightarrow \dfrac{a\sqrt{2mV_0}}{\hbar}\sqrt{(1-X)}>>1$

$$\Rightarrow\frac{2ma^2V_0}{\hbar^2}(1-X)>>1$$

$$\Rightarrow(1-X)>>\frac{\hbar^2}{2ma^2V_0}$$

	• Pour un électron : $\gamma a >> 1$ si et seulement si $(1-X) >> 2.10^{-2}$ • Pour un proton : $\gamma a >> 1$ si et seulement si $(1-X) >> 10^{-5}$ A.N. : Pour $X = 0,5$: • Pour un électron : $\gamma a = 5,14$ • Pour un proton : $\gamma a = 220,16 >> 1$ L'hypothèse $\gamma a >> 1$ est plus satisfaite pour les particules les plus massives	

3. Application : microscope à effet tunnel

3.1/	La microscopie à effet tunnel est une technique d'imagerie qui permet d'atteindre la résolution du nanomètre et de distinguer ainsi les atomes à la surface d'un objet. Lors du balayage, le dernier atome de la pointe suit le relief de la surface et c'est en détectant le mouvement de la pointe qu'on remonte à la géométrie de la surface.	
3.2/	$J_T = \beta U T = \beta U T_0 \exp(-2\gamma a)$ $\boxed{J_T = J_{T0}\exp(-2\gamma a) \text{ où } J_{T0} = \beta U T_0}$	
3.3/	$I_T = I_0 \exp(-2\gamma a)$ $\ln(I_T) = \ln(I_0) - 2\gamma a$ $\frac{dI_T}{I_T} = -2\gamma da$ $\boxed{\frac{\Delta I_T}{I_T} = 2\gamma \Delta a}$ $\frac{\Delta I_T}{I_T} = 2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)}\Delta a$ A.N. : Pour $\Delta a = 0,1.10^{-9}\text{m}$ $\frac{\Delta I_T}{I_T} = 0,23$	
3.4/	$\frac{\Delta I_T}{I_T} = 2\gamma \Delta a = 0,1 \Longrightarrow \Delta a = \frac{0,1}{2\gamma} = 0,05\sqrt{\frac{\hbar^2}{2m(V_0 - E)}}$ A.N. : $\Delta a = 4,35.10^{-12} m$	

Problème III : thermodynamique statistique

A/ Modèle Classique : (Questions de cours)

1./	L'état d'un atome est décrit par 6 variables caractérisant sa position $\vec{r}(x, y, z)$ et sa vitesse $\vec{V}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$	
2./	L'énergie mécanique d'un atome : $E_{atome} = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$ $E_{atome} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 y^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 z^2$	
3./	Cette énergie compte 6 degrés de liberté quadratiques. Leur contribution dans l'énergie moyenne, d'après le théorème d'équipartition de l'énergie, est : $\langle \varepsilon \rangle = 6\frac{1}{2}k_B T = 3k_B T$	

4./ Si on désigne par N le nombre d'atome du cristal et par $n = \frac{N}{\mathcal{N}_A}$ le nombre de mole correspondants. L'énergie interne du cristal s'écrit :

$$U = N\langle\varepsilon\rangle = 3Nk_BT = 3n\mathcal{N}_A k_B T$$

Soit :

$$U = 3nRT$$

La capacité calorifique à volume constant du cristal est :

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \frac{dU}{dT} = 3nR$$

La capacité calorique molaire du solide est alors $C_{V,m} = 3R$. Ce résultat est connu sous le nom de Loi de Dulong et petit.

Loi de Dulong et petit :
La capacité thermique molaire des solides est sensiblement la même pour tous les corps solides et vaut $C_m = 3R \approx 25 JK^{-1}mol^{-1}$.

B/ Modèle quantique :

1./ En posant, $\beta = \frac{1}{k_B T}$,la fonction de partition :

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\beta E_n) = \exp\left(-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega\right)\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-n\beta\hbar\omega)$$

La somme infinie dans l'expression de Z se calcule facilement car elle se ramène à la somme d'une progression géométrique de raison $\exp(-\beta\hbar\omega)$.

$$z = \exp\left(-\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)\frac{1}{1-\exp(-\beta\hbar\omega)}$$

$$z = \frac{\exp\left(-\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)}{\exp\left(-\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)\left(\exp\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) - \exp\left(-\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)\right)}$$

$$z = \frac{2}{\sinh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)}$$

D'où le résultat :

$$\boxed{z(T) = \frac{1}{2\,\mathrm{sh}\left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT}\right)}}$$

La probabilité d'occupation p_n d'un niveau d'énergie E_n s'écrit :

$$p_n = \frac{\exp(-\beta E_n)}{z(T)}$$

$$\boxed{p_n = 2\,\mathrm{sh}\left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT}\right)\exp\left(-\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\hbar\omega}{k_BT}\right)}$$

2./ L'énergie moyenne d'un oscillateur 1D est donnée par :

$$\langle\varepsilon_{1D}\rangle = \sum_n p_n E_n = -\frac{1}{Z}\frac{dZ}{d\beta}$$

$$\langle\varepsilon_{1D}\rangle = -\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial\beta} = -\frac{\sinh\left(-\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)}{2}\left(-2\frac{\frac{\hbar\omega}{2}\cosh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)}{\sinh^2\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)}\right)$$

	$$\langle\varepsilon_{1D}\rangle = \frac{\hbar\omega}{2}\frac{\cosh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)} = \frac{\hbar\omega}{2}\operatorname{cotanh}\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)$$ D'où le résultat : $$\boxed{\langle\varepsilon_{1D}\rangle = \frac{\hbar\omega}{2}\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT}\right)}$$	
3./	L'énergie moyenne du solide comportant N atomes est : $$\langle E\rangle = N \times \langle\varepsilon\rangle = 3N\ \langle\varepsilon_{1D}\rangle\ .$$ $$\boxed{U = 3nN_A\ \langle\varepsilon_{1D}\rangle}$$	
4./	L'énergie interne U du système est : $$U = \langle E\rangle = 3nN_A\ \langle\varepsilon_{1D}\rangle$$ $$U = 3nN_A\ \frac{\hbar\omega}{2}\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT}\right)$$ Par définition, la capacité thermique du système est : $$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \frac{dU}{dT}$$ $$C_V = 3nN_A\ \frac{\hbar\omega}{2}\frac{\hbar\omega}{2k_BT^2}\frac{1}{\sinh^2\left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT}\right)}$$ $$C_V = 3n\ N_Ak_B\left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT}\right)^2\frac{1}{\sinh^2\left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT}\right)}$$ $$C_V = 3n\ R\left(\frac{\frac{u}{2}}{\sinh\left(\frac{u}{2}\right)}\right)^2$$ La capacité calorique molaire du solide est alors $\boxed{C_{V,m} = 3\ R\left(\frac{\frac{u}{2}}{\sinh\left(\frac{u}{2}\right)}\right)^2}$.	
5./	À basse température $u = \frac{\hbar\omega}{k_BT} \gg 1$ alors $\sinh\left(\frac{u}{2}\right) \approx \frac{1}{2}\exp\left(\frac{u}{2}\right)$ d'où la tendance $C_{V,m} = 3\ R\left(\frac{\frac{u}{2}}{\frac{1}{2}\exp\left(\frac{u}{2}\right)}\right)^2 \longrightarrow 0.$ À haute température $u = \frac{\hbar\omega}{k_BT} \ll 1$ alors $\sinh\left(\frac{u}{2}\right) \approx \frac{u}{2}$ d'où la tendance $C_{V,m} = 3\ R\left(\frac{\frac{u}{2}}{\frac{u}{2}}\right)^2 \longrightarrow 3\ R.$ La température caractéristique de la transition entre ces deux régime, notée Θ_D, est obtenue pour $u = \frac{\hbar\omega}{k_BT} \approx 1$. D'où : $$\boxed{\theta_E = \frac{\hbar\omega}{k_B}}$$	
6./	Sur la figure, on peut lire $C_{V,m} = 5{,}9\ \text{cal.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$. Soit $C_{V,m} = 24{,}7\ \text{J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$. Théoriquement on obtient $C_{V,m} \approx 3\ R = 24{,}9\ \text{J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$. L'écart relatif entre la valeur théorique et expérimentale est : $$\frac{\Delta C_{V,m}}{C_{V,m}} = \frac{24{,}9 - 24{,}7}{24{,}9} \approx 1\%\ \text{(bonne concordance)}$$	