INSTITUT PRÉPARATOIRE
AUX ÉTUDES D'INGÉNIEURS
DE SFAX
Département de la Préparation
Mathématiques Physique

MP 2
Mai 2019
Durée : 4h

Devoir de synthèse n° 2

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.

Problème

Définitions et notations

On travaille dans $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$, qui est l'espace vectoriel de toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$; on notera aussi $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{C}^p(\mathbb{R}), \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$) le sous espace vectoriel des fonctions continues (resp. de classe $\mathcal{C}^p$, $\mathcal{C}^\infty$) à valeurs complexes. Pour toute fonction $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ et tout réel x, on pose

$$\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t)\, dt,$$

lorsque cette quantité a un sens.
Quand elle est définie, la fonction $\widehat{f}$ s'appelle la transformée de Fourier de f.

ÉTUDE D'UN EXEMPLE

1. Soient x et α deux réels strictement positifs.

   (a) Justifier l'intégrabilité de la fonction $t \mapsto \dfrac{1-e^{-t}}{t}$ sur l'intervalle $]0, \alpha]$.

   (b) Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t}$ est intégrable sur l'intervalle $[x, +\infty[$.

2. Dans la suite, φ désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\varphi(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt$.

   (a) Montrer que, pour tout réel strictement positif x, $0 < \varphi(x) < \frac{e^{-x}}{x}$.

   (b) Justifier que φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner l'expression de φ'.

   (c) Montrer que, lorsque x tend vers 0^+, $\varphi(x) + \ln x$ tend vers

$$C = \varphi(1) - \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}\, dt.$$

(on pourra exprimer $\ln x$ sous forme d'une intégrale).

(d) Montrer que, pour tout $x > 0$, $\varphi(x) + \ln x = C + \displaystyle\int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t}\,dt$, et en déduire que $\varphi(x) + \ln x = C + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{kk!}$.

3. Soit ψ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\psi(x) = \frac{1}{2}\varphi(|x|)$.

   (a) Montrer que ψ est intégrable sur les deux intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

   (b) Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{\psi}(x) = \int_{-\infty}^{0} \psi(t)e^{-ixt}dt + \int_0^{+\infty} \psi(t)e^{-ixt}dt$$

   a un sens et que

$$\widehat{\psi}(x) = \int_0^{+\infty} \varphi(t)\cos(xt)\,dt.$$

   (c) Montrer que $\widehat{\psi}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer ses dérivées successives sous forme d'intégrales.

   (d) Montrer que, pour tout réel non nul x, on a

$$\widehat{\psi}(x) = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\sin(xt)\,dt,$$

   et calculer $\widehat{\psi}(0)$.

4. (a) Montrer que la fonction $\Phi : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\sin(xt)\,dt$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $\Phi'(x)$, pour tout $x > 0$.

   (b) En déduire soigneusement que pour tout réel non nul x,

$$\widehat{\psi}(x) = \frac{\arctan x}{x}.$$

QUELQUES PROPRIÉTÉS DE LA TRANSFORMÉE DE FOURIER D'UNE FONCTION

Dans cette partie, on se donne une fonction f continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$.

1. Transformée de Fourier d'une fonction intégrable

   (a) Montrer que pour tout réel x, $\widehat{f}(x)$ est bien définie et que la fonction $\widehat{f}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

   (b) Montrer que $\widehat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Transformations

   (a) Vérifier que pour tout réel a, les fonctions $f_a : t \mapsto f(t-a)$ et $F_a : t \mapsto f(at)$ possèdent des transformées de Fourier et montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \widehat{f_a}(x) = e^{-iax}\widehat{f}(x) \quad \text{et} \quad \widehat{F_a}(x) = \frac{1}{|a|}\widehat{f}(\frac{x}{a})(a \neq 0).$$

(b) Exprimer de même la transformée de Fourier de l'application $t \mapsto f(t)e^{iat}$ en fonction de celle de f.

(c) Si f est paire (resp. impaire), donner une expression de sa transformée de Fourier sous forme d'une intégrale sur $[0, +\infty[$.

(d) Que peut-on alors dire de la transformée de Fourier d'une fonction réelle et paire (resp. impaire).

3. Dérivation
On considère un élément f de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$; on suppose que f et f' sont intégrables sur $\mathbb{R}$.

(a) Montrer que f tend vers 0 en $\pm\infty$.

(b) Montrer alors que $\forall x \in \mathbb{R}, \widehat{f'}(x) = ix\widehat{f}(x)$, puis en déduire que $\widehat{f}$ tend vers 0 en $\pm\infty$.

(c) On suppose de plus que l'application $g : t \mapsto tf(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, montrer que $\widehat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}, (\widehat{f})'(x) = -i\widehat{g}(x)$.

4. Étude d'un exemple: la transformée de Fourier de la fonction $f : t \mapsto e^{-\pi t^2}$

(a) On considère les deux fonctions G et H définies sur $\mathbb{R}$ par:

$$G(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+u^2)}}{1+u^2}\, du; \quad H(x) = (\int_0^x e^{-u^2}\, du)^2.$$

i. Montrer que G et H sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser les dérivées G' et H'. En déduire que la fonction $G + H$ est constante sur $\mathbb{R}$, égale à $\frac{\pi}{4}$.

ii. Montrer l'inégalité suivante pour tout réel x

$$0 \leq G(x) = e^{-x^2} \int_0^1 \frac{e^{-x^2u^2}}{1+u^2}\, du \leq \frac{\pi}{4} e^{-x^2}.$$

iii. En déduire la limite de $G(x)$, puis de $H(x)$, quand x tend vers $+\infty$, puis déterminer l'intégrale I définie par

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, du.$$

(b) On suppose dans cette question que $f(t) = e^{-\pi t^2}$. Ainsi

$$\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} e^{-\pi t^2}\, dt.$$

i. En déterminant les transformées de Fourier des deux membres de la relation $f'(t) = -2\pi t f(t)$, déterminer une équation différentielle linéaire du premier ordre vérifiée par $\widehat{f}$.

ii. Calculer $\widehat{f}(0)$ puis en déduire l'expression de $\widehat{f}(x)$.

5. Continuité de la transformée de Fourier
On munit l'espace vectoriel $L^1(\mathbb{R})$ des fonctions à valeurs complexes continues et intégrables sur $\mathbb{R}$ de la norme N_1 définie pour une fonction f de $L^1(\mathbb{R})$ par:

$$N_1(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt.$$

On munit l'espace vectoriel $C_b(\mathbb{R})$ des fonctions à valeurs complexes continues et bornées sur $\mathbb{R}$ de la norme N_∞ définie pour une fonction f de $C_b(\mathbb{R})$ par:

$$N_\infty(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|.$$

(a) Montrer que l'application $T : f \mapsto T(f) = \widehat{f}$ est linéaire et continue de l'espace $L^1(\mathbb{R})$ muni de la norme N_1 dans l'espace $C_b(\mathbb{R})$ muni de la norme N_∞.

(b) i. Justifier l'existence du réel noté

$$\|T\| = \sup\{\frac{N_\infty(T(f))}{N_1(f)}; f \in L^1(\mathbb{R}), f \neq 0\}.$$

ii. Calculer sa valeur.

Exercice

Un étudiant s'ennuie durant son cours de probabilités et passe son temps à regarder par la fenêtre les feuilles tomber d'un arbre. On admet que le nombre de feuilles tombées à la fin du cours est une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Cela signifie que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.

1. (a) Expliquer pourquoi les hypothèses de l'énoncé permettent de dire que pour tout $\lambda > 0$, $e^\lambda = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$.

   (b) Calculer l'espérance et la variance de X.

2. À chaque fois qu'une feuille tombe par terre, l'étudiant lance une pièce qui donne pile avec une probabilité p et face avec probabilité $q = 1 - p$, $p \in]0, 1[$. On note Y et Z le nombre de faces et de piles obtenus respectivement.

   (a) Pour $k \in \mathbb{N}$ fixé, expliquer de manière simple pourquoi la loi de Y sachant $X = k$ est une loi binomiale dont on précisera les paramètres. En déduire l'expression de $\mathbb{P}(Y = i|X = k)$.

   (b) Pour $(k, i) \in \mathbb{N}^2$, calculer la quantité $\mathbb{P}(X = k, Y = i)$.

   (c) En déduire la loi de Y, ainsi que son espérance.

   (d) Donner, sans calculs, la loi de Z.

3. Montrer que les variables Y et Z sont indépendantes.

4. Calculer $\mathbb{E}(YZ)$ et $\mathcal{V}(Y+Z)$ où $\mathbb{E}$ et $\mathcal{V}$ désignent respectivement l'espérance et la variance.

BON TRAVAIL