UNIVERSITÉ DE SFAX

Année universitaire : 2018/2019

* * * * *

Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieurs de Sfax

Examen d'Algebre - Semestre N°2
Section : M.P.2

Durée : 3h | Date : 29 Mai 2019 | Nbre de pages : 3

Exercice

1. Déterminer les sous groupes de $\mathbb{Z}$.
2. Soit $G = \langle a \rangle$ un groupe cyclique d'ordre $n \geq 2$.
   (a) Justifier que a est d'ordre n.
   (b) Soit H un sous groupe non trivial de G. On pose $I = \{k \in \mathbb{Z}; a^k \in H\}$.
      i. Montrer que I est un sous groupe de $\mathbb{Z}$.
      ii. Déduire qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $H = \langle a^m \rangle$.
      iii. Montrer que m divise n et que $|H| = \dfrac{n}{m}$.
3. Soit G un sous groupe fini de $GL_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est diagonalisable pour tout $A \in G$.

PROBLEME

Notations

Dans ce problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et on note :

- $\mathcal{B} = (e_1, .., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
- $\langle ., . \rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$: si $x = (x_1, .., x_n)$ et $y = (y_1, .., y_n)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on a $\langle x, y \rangle = {}^tXY = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ où X et Y sont les matrices colonnes des vecteurs x et y dans la base $\mathcal{B}$.
- Si N est une norme de $\mathbb{R}^n$, on note **Isom(N)**$= \{u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n);\ N(u(x)) = N(x), \forall x \in \mathbb{R}^n\}$.
- Une norme N de $\mathbb{R}^n$ est dite euclidienne s'il existe un produit scalaire φ de $\mathbb{R}^n$ telle que $N(x) = \sqrt{\varphi(x, x)}, \forall x \in \mathbb{R}^n$.
- $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant ${}^tPP = I_n\}$ le groupe des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On dit que S est définie positive si ${}^tXSX > 0\ \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$.
- $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

si $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$, $\|x\|_\infty \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ et $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

Partie I

1. **Identité du parallélogramme**

   (a) Montrer que si N est une norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ alors elle vérifie l'identité du parallélogramme suivante :
   Pour tout x et y de $\mathbb{R}^n$, on a $(N(x+y))^2 + (N(x-y))^2 = 2\left[(N(x))^2 + (N(y))^2\right]$

   (b) Calculer $\|e_1 + e_2\|_\infty^2 + \|e_1 - e_2\|_\infty^2$, puis déduire que $\| \ \|_\infty$ n'est pas euclidienne.

   (c) Montrer de même que $\|.\|_1$ n'est pas euclidienne.

2. Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si $sp_{\mathbb{R}}(S) \subset \mathbb{R}_+^*$.

3. Soit $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Pour tout $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ on note $\varphi_S(x,y) = {}^tXSY$ où X et Y sont les matrices colonnes des vecteurs x et y dans la base $\mathcal{B}$.
   Montrer que φ_S définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

4. Soit φ un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ et $S = (\varphi(e_i, e_j))_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   (a) Justifier que pour tous vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$ $\varphi(x,y) = {}^tXSY$.

   (b) Déduire que $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

   (c) Que vaut S lorsque φ est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

Partie II

Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que $(\mathrm{Isom}(N), \circ)$ est un sous-groupe de $GL(\mathbb{R}^n)$.

2. On note $S_1(N) = \{x \in \mathbb{R}^n, N(x) = 1\}$, la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ pour N.
   Montrer que $u \in \mathrm{Isom(N)}$ si et seulement si $u\left(S_1(N)\right) = S_1(N)$.

3. Dans cette question uniquement $n = 2$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
   On pose $D = \mathrm{Vect}\{e_1 - e_2\}$.
   On note s la symétrie orthogonale par rapport à D et r la rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{3}$.
   Les endomorphismes s et r sont-ils dans $\mathrm{Isom}(\| \ \|_1)$?

Partie III

Soit $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. N_S la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$ associée au produit scalaire φ_S.
Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

1. Montrer que

$$u \in \mathrm{Isom}(N_S) \Longleftrightarrow \varphi_S(u(x), u(y)) = \varphi_S(x,y), \quad \forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2.$$

2. Déduire que

$$u \in \mathrm{Isom}(N_S) \iff \text{sa matrice } A \text{ dans la base } \mathcal{B} \text{ vérifie } {}^tASA = S.$$

3. Retrouver alors $\mathrm{Isom}(\| \ \|_2)$.

Partie IV

1. Soit $r \in \mathbb{N}$; $x_0, x_1, ..., x_r$ $r+1$ réels deux à deux distincts.
   Pour tout $P \in \mathbb{R}_r[X]$, on pose $f(P) = (P(x_0), P(x_1), ...P(x_r))$.
   (a) Montrer que f réalise un isomorphisme de $\mathbb{R}_r[X]$ sur $\mathbb{R}^{r+1}$.
   (b) Déduire que, pour tous réels $y_0, y_1, ..., y_r$, il existe un unique $L \in \mathbb{R}_r[X]$ vérifiant $L(x_i) = y_i$, $\forall i \in \{0, 1, ..., r\}$.
2. Soit $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1, ..., \lambda_r$ les valeurs propres deux à deux distinctes de S de multiplicités respectives $m_1, ..., m_r$. Soit $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPSP = D$ la matrice diagonale par blocs $D = diag(\lambda_1 I_{m_1}, ..., \lambda_r I_{m_r})$.
   (a) Soit $D_1 = diag(\sqrt{\lambda_1} I_{m_1}, ..., \sqrt{\lambda_r} I_{m_r})$ et $A = PD_1{}^tP$. Montrer que $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et que $A^2 = S$.
   (b) montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ tel que $A = Q(S)$.
   (c) Soit $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = S$.
   montrer qu'il existe $Q_1 \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ tel que $A = Q_1(B)$.
   (d) Montrer que la somme de deux matrices symétriques définies positives est une matrice symétrique définie positive puis inversible.
   (e) Déduire que $B = A$.
   Ainsi on a montré que'il existe une unique matrice $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 = S$. A est dite la racine carrée de S et on la note $A = \sqrt{S}$.