UNIVERSITÉ DE SFAX

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieurs de Sfax

Année universitaire : 2018/2019

Devoir d'Algèbre - Semestre N°2
Section : M.P.2

Durée : 2h | **Date : 23 Fervrier 2019** | **Nbre de pages : 2**

Notations :

- E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$.
- $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni de son produit scalaire canonique $\langle\ ,\ \rangle$ et sa norme euclidienne $\|\ \|$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est une matrice **normale** si : $A\,{}^tA = {}^tAA$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est une matrice **orthogonale** si : ${}^tAA = I_n$.

Partie I

1. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   Montrer que : $A = B \Longleftrightarrow {}^tXAY = {}^tXBY,\ \ \forall X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   Montrer que A est normale si et seulement si $\|AX\| = \|\,{}^tAX\|$, $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
3. Soit A une matrice normale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   Montrer que si P est une matrice orthogonale alors ${}^tPAP$ est une matrice normale.
4. Montrer que si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases orthonormée d'un espace euclidien, alors la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est orthogonale.
5. Pour tout $(M, N) \in (\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}))^2$, on pose $\psi(M, N) = tr(\,{}^tMN)$. Montrer que ψ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.
6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   Montrer que A est nilpotente si et seulement si $sp_{\mathbb{C}}(A) = \{0\}$.

Partie II

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E telle que $A = mat(f, \mathcal{B})$ est **normale.**

On se propose de montrer que tout sous-espace vectoriel de E stable par f admet un supplémentaire stable par f.

Pour tout $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, on pose $\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

1. (a) Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

   Dans la suite on munit E de ce produit scalaire.

   (b) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E.

2. Montrer que si $\mathcal{B}'$ est une base orthonormée de E, alors $mat(f, \mathcal{B}')$ est normale.

3. Soit F un sous-espace vectoriel, non trivial, de E stable par f.

   On désigne par $p = \dim(F) \in \{1, ..., n-1\}$.

   (a) Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}_1$ de E ; $A_1 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $A_2 \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{R})$ telles que $M = mat(f, \mathcal{B}_1) = \begin{pmatrix} A_1 & C \\ O_{n-p,p} & A_2 \end{pmatrix}$.

   (b) Montrer, en utilisant l'égalité ${}^tMM = M\,{}^tM$, que $tr(C\,{}^tC) = 0$, puis que C est nulle.

   (c) En déduire que $F^\perp$ est stable par f.

Partie III

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

On suppose que **tout sous-espace vectoriel de E stable par f admet un supplémentaire stable par f.**

On se propose de montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$, **annulateur** de f, scindé sur $\mathbb{C}$ et **à racines simples.**

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $g = P(f)$ est nilpotent.

   (a) Justifier que $\ker(g)$ est stable par f.

   Soit alors H un supplémentaire de $\ker(g)$ stable par f.

   (b) Montrer que H est stable par g. On note g_H l'endomorphisme induit par g sur H.

   (c) Montrer que si $H \neq \{0_E\}$ alors $sp(g_H) = \{0\}$.

   (d) Déduire que $H = \{0_E\}$ puis que $g = 0$.

2. On note $\chi_f(X) = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$, où $\lambda_1, ..., \lambda_m$ sont les racines complexes de χ_f de multiplicités respectives $\alpha_1, ..., \alpha_m$.

   On pose $Q(X) = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)$.

   (a) Montrer que $Q \in \mathbb{R}[X]$.

   (b) Montrer que $Q(f)$ est nilpotent.

   (c) Déduire que $Q(f) = 0$.