

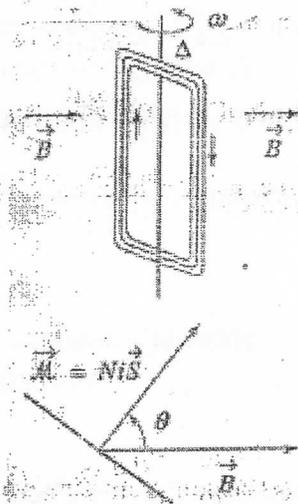
Institut préparatoire aux études de l'ingénieur de SFAX

Devoir de contrôle de physique N°1- MP 2 / T 2

30 Octobre 2019 – Durée: 2 H

Exercice

Une bobine plate de $N = 100$ spires, d'aire $S = 25 \text{ cm}^2$, et de moment d'inertie J_{Δ} tourne avec une vitesse angulaire constante ω grâce à un couple $\Gamma_{méc}$. Elle est plongée dans un champ magnétique de norme $B = 0,4 \text{ T}$ supposé uniforme et normal à l'axe de rotation. La bobine dont les bornes sont reliées possède une résistance $R = 1 \Omega$. Le champ qu'elle crée est négligeable devant celui de l'aimant. Lors de la rotation, la bobine est soumise à un couple de frottement $\Gamma_{fr} = -\alpha\omega$ où α est une constante positive. On note $\theta_0 = \theta(t = 0)$.



1- Justifier l'apparition et calculer la f.é.m. induite dans la bobine.

2- Montrer que le courant induit $i(t) = \frac{NBS\omega}{R} \sin(\omega t + \theta_0)$

3- Montrer que $P_{méc} = P_e + \alpha\omega^2$, où P_e est la puissance électrique.

4- Sachant que le rendement de la conversion d'énergie mécanique-électrique vaut 0,4. Déterminer la puissance mécanique moyenne qu'il faut fournir pour entretenir une rotation à $\omega = 20 \text{ rd/s}$.

5- Citer une application de ce dispositif.

Problème

I. Étude d'un signal périodique (4 pts)

On considère le signal $U_{\alpha}(t)$ de rapport cyclique $\alpha = \frac{T_f}{T}$ (figure 1). On note $\omega = \frac{2\pi}{T}$



1- Calculer U_{moy} et U_{eff} , les valeurs moyenne et efficace de $U_{\alpha}(t)$.

2- Justifier que $U_{\alpha}(t)$ peut s'écrire sous la forme :

$$U_{\alpha}(t) = U_{moy} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega t - \theta_n)$$

3- On rappelle que $C_n = 2|D_n|$ et $\theta_n = \arg(D_n)$ où $D_n = \frac{1}{T} \int_0^T U_\alpha(t) e^{-jn\omega t} dt$.

Montrer que :

$$C_n = 2\alpha E \left| \frac{\sin(n\pi\alpha)}{n\pi\alpha} \right|$$

4- Tracer $U_\alpha(t)$ et son spectre pour les deux cas particuliers $\alpha \ll 1$ et $\alpha = \frac{1}{2}$. Commenter.

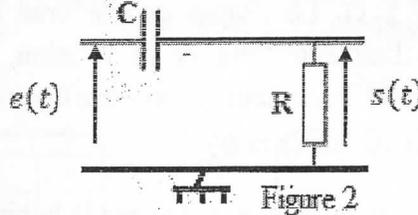
5- a. Calculer, pour $\alpha = \frac{1}{2}$, le taux de distorsion harmonique $\eta = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} C_n^2}}{C_1}$ en %. Commenter.

b. Vérifier l'égalité de Parseval pour $\alpha = \frac{1}{2}$.

On donne $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

II. Étude d'un filtre analogique (5,5 pts)

On considère le circuit suivant (figure 2).



6- La tension d'entrée s'écrit $e(t) = E \cos(\omega t)$.

a. Montrer que $\underline{H}(j\omega) = \frac{s}{e} = \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$. On exprimera $\omega_0 = \frac{1}{\tau}$ en fonction de R et C .

b. Déterminer le gain $G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)|$ et le déphasage $\phi(\omega) = \arg(\underline{H}(j\omega))$.

c. Représenter le diagramme de Bode de ce filtre.

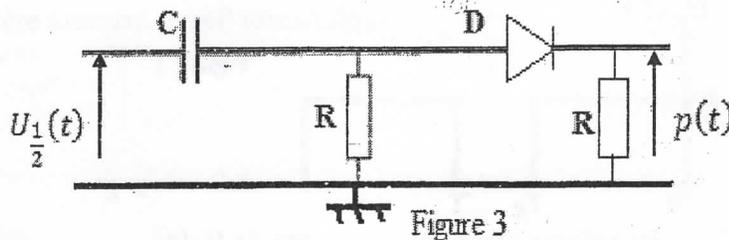
7- La tension d'entrée $e(t)$ s'identifie maintenant à $U_{\frac{1}{2}}(t)$ de rapport cyclique $\alpha = \frac{1}{2}$

a. Déterminer l'équation différentielle liant $e(t)$ et $u_c(t)$ la tension aux bornes de C .

b. Résoudre cette équation puis tracer l'allure du $s(t)$ pour $\omega \ll \omega_0$. Le condensateur est, initialement, déchargé.

c. Retrouver ces résultats en utilisant le comportement du filtre aux basses fréquences.

8- On considère le circuit suivant (figure 3). La diode est supposée idéale.



a. Représenter, en justifiant, l'allure du signal de sortie $p(t)$ et du son spectre.

b. Comment mettre en évidence le caractère non linéaire de la composante D ?

On prendra dans la suite :

$$p(t) = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \cos(n\omega t) \quad \text{avec } \omega = 2\pi \cdot 10^4 \text{ rad s}^{-1}$$

III. Échantillonnage (4 pts)

9- On réalise la multiplication du signal $p(t)$ par un signal information $V_{inf}(t)$ sinusoïdal de pulsation ω_i et d'amplitude V_0 à l'aide d'un multiplieur de coefficient K . La tension à la sortie du multiplieur est alors $V_{mul}(t) = K \cdot p(t) \cdot V_{inf}(t)$.

- Quelle opération réalise-t-on?
- Calculer $V_{mul}(t)$. On donne $\cos(a) \cdot \cos(b) = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$
- Commenter le spectre de $V_{mul}(t)$.
- Représenter le spectre de $V_{mul}(t)$ pour le cas où $V_{inf}(t)$ est un signal triangulaire de fréquence 500 Hz (son spectre contient que des harmoniques du rang impair).

10-

- Comment récupérer le signal information à partir du signal $V_{mul}(t)$?
- Quelle condition doit vérifier la fréquence f ? Qu'appelle-t-on cette condition?

11- On augmente la pulsation ω_i du signal sinusoïdal $V_{inf}(t)$

- Qu'observe-t-on sur la fenêtre FFT de l'oscilloscope?
- On s'arrête à la fréquence $f_i = 9 \text{ kHz}$. Montrer que le signal échantillonné s'identifie avec un autre signal de fréquence apparente f'_i plus basse que l'on précisera.
- Nommer ce phénomène.

IV. Applications

12- Application 1 (1,5 pts)

On souhaite enregistrer un signal musical avec une haute-fidélité. Le signal à échantillonner possède des harmoniques très élevées qui risquent de nuire à la qualité de l'enregistrement (*Les fréquences du son audible sont comprises entre 20Hz et 20KHz*).

- Avant la numérisation le signal doit être filtré. Quel type de filtre doit-on utiliser? Pourquoi?
- Proposer une fréquence d'échantillonnage adaptée à la situation.
- Le filtre anti repliement utilisé (de fréquence propre f_0) est de second ordre. Ci-dessous (*figure 4*) on donne l'évolution, en fonction de la fréquence, du gain et du déphasage φ entre la tension de sortie et la tension d'entrée. Les expressions de la fonction de transfert, de la fréquence de coupure et de la fréquence de résonance sont :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}, \quad f_r = \frac{f_c}{\sqrt{(1 - \frac{1}{2Q^2}) + \sqrt{(1 - \frac{1}{2Q^2})^2 + 1}}} \quad \text{et} \quad f_0 = \frac{f_c}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}, \quad \text{respectivement.}$$

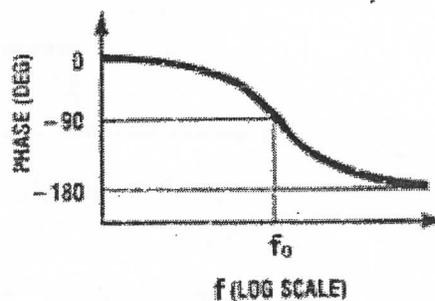
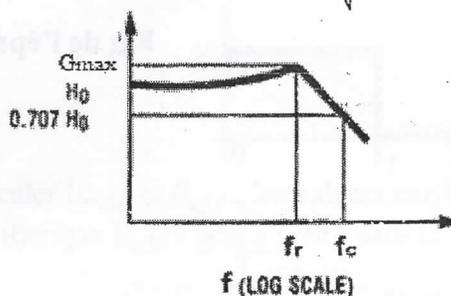


Figure 4

Quatre essais ont été réalisés en laboratoire à 4 fréquences différentes. On présente ci-dessous (figure 5) des oscillogrammes dont $s_1(t)$ et $s_2(t)$ désignent les tensions d'entrée et de sortie, respectivement. On note φ le déphasage entre ces deux tensions. Déterminer la nature du filtre ainsi que ses caractéristiques f_r , f_c et le facteur de qualité Q . Expliciter clairement la démarche.

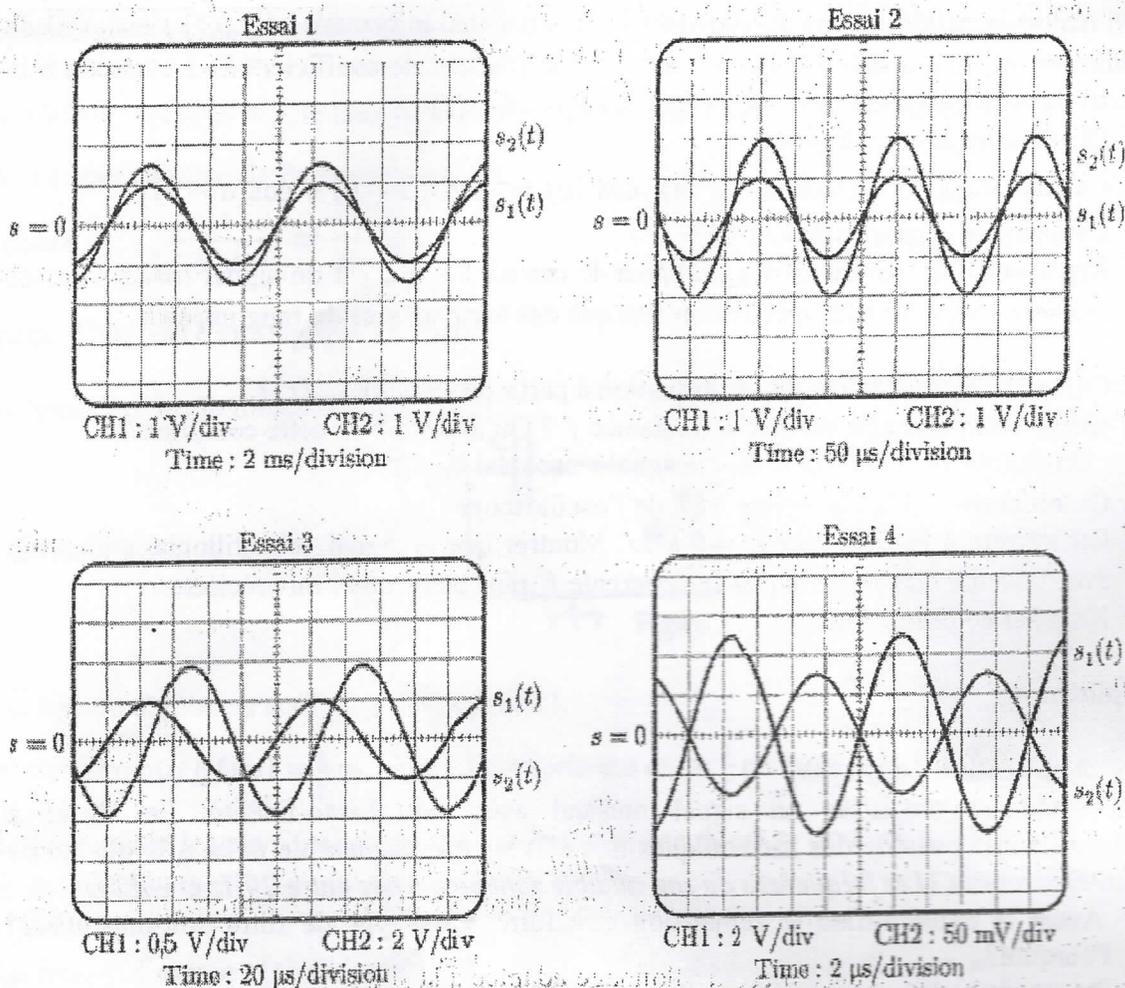


Figure 5

13- Application 2 (1,5 pts)

Lire le texte en annexe et répondre aux questions :

- L'action est échantillonnée à $F = 24 \text{ Hz}$. Qu'observe-t-on si la fréquence de rotation de la roue f_r prend les trois valeurs 5, 12 et 16 Hz ?
- Comment choisir la cadence de capture pour enregistrer convenablement 3 pales d'hélicoptère tournant à 480 tours/minute ?

Fin de l'épreuve

Annexe

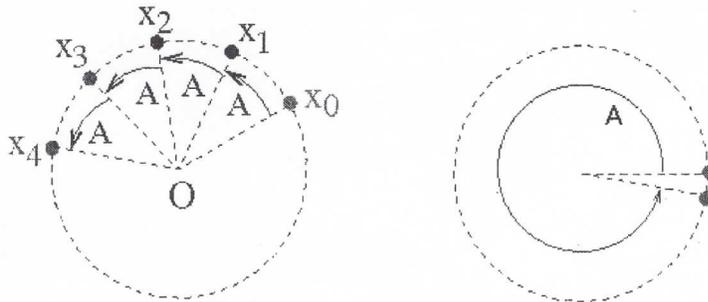
Le phénomène de repliement de spectre, ou l'illusion de la roue qui tourne en sens inverse.

Lorsqu'un véhicule roule à haute vitesse, pourquoi a-t-on l'impression de voir ses jantes tourner dans le sens inverse?

C'est une illusion d'optique fréquente, mais fascinante : un objet en rotation (roue, pale d'hélicoptère,..) peut dans certaines conditions sembler tourner dans le sens inverse, voire former d'étonnants motifs.

L'explication tient en fait à la **fréquence d'échantillonnage** (c'est-à-dire le nombre d'images saisies par seconde) des caméras, lorsqu'il s'agit d'images montrées sur un écran (25 ou 30 Hz selon les standards), ou tout simplement à la persistance rétinienne de nos yeux en situation réelle, qui est limitée à 20 Hz.

En fait, lorsque l'on filme (ou que l'on voit) une roue tourner, on ne perçoit jamais un flux continu. L'œil ou la caméra l'interprète image par image, chacune étant espacée d'un court délai temporel, qui est l'inverse de la fréquence: si la fréquence de trame est de 25 Hz, cela signifie qu'on ne verra en fait une nouvelle image que toutes les 40 millisecondes (ms) environ (durée matérialisée par l'angle "A" sur le schéma ci-dessous). Tout dépend alors de la vitesse de déplacement de la roue! Si sa vitesse angulaire (nombre de tours par seconde) est suffisamment faible, pas de problème: on visualise toutes les étapes du déplacement, toutes les 40 ms. Le cerveau interprète les images dans leur ordre chronologique, comme on peut le voir ci-dessous sur la figure (à gauche).



Le problème ? Si l'on augmente la vitesse de rotation, on peut se retrouver dans une situation où le point fait presque (mais pas tout à fait) un tour toutes les 40 ms (voir figure à droite ci-dessus). Le cerveau interprète alors ce déplacement selon le sens du chemin le plus court, et visualise toutes les 40 ms une nouvelle image mais dans le sens inverse du mouvement réel ! Le phénomène peut être transitoire, si le véhicule est en cours d'accélération, ou permanent si la vitesse est constante.

Mathématiquement, cet effet est observé à chaque fois que **deux phénomènes périodiques sont superposés**: celui qui est observé (le mouvement de la roue) et celui qui observe (la cadence de capture d'images de la caméra). Les deux phénomènes périodiques n'étant pas en phase, il apparaît un décalage qui est ensuite mal interprété par le cerveau et il ne garde par défaut que celle de plus basse fréquence, même si c'est la mauvaise. C'est ce qu'on appelle le **repliement du spectre**: les fréquences trop hautes sont divisées (repliées) et deviennent des fréquences plus basses.

Pour capturer convenablement un signal d'une fréquence donnée, **l'échantillonnage doit se faire à une fréquence supérieure ou égale au double de celle du signal** (théorème de Nyquist-Shannon).

“ Sciences et avenir - Juin 2018 ”