


Institut Préparatoire aux Etudes d'Ingénieur de Sfax	
Devoir de synthèse de Physique Semestre 2	MP2 A.U : 2020-2021 Durée : 4H

## **PROBLEME 1 : TRANSFERT THERMIQUE**

### Données numériques

$c = 4 \times 10^2 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$  est la capacité thermique massique du cuivre

$\rho = 9 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  est la masse volumique du cuivre

### Formulaire

Pour tout réel  $\alpha \neq 0$  et pour tout couple  $(m, n)$  d'entiers positif on a

$$\int_0^\alpha \cos\left(\frac{\pi m u}{\alpha}\right) \cos\left(\frac{\pi n u}{\alpha}\right) du = \begin{cases} \frac{\alpha}{2} & \text{si } m = n \neq 0 \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases}$$

Pour accéder expérimentalement à la conductivité thermique du cuivre, il est utile de connaître sa capacité thermique massique  $c$  et sa masse volumique  $\rho$ . On se propose d'étudier la méthode du « flash ». Dans cette méthode, on utilise une plaque de cuivre d'épaisseur constante  $L = 3,12 \text{ mm}$  selon l'axe  $Ox$  et de dimensions grandes devant  $L$  suivant les axes  $Oy$  et  $Oz$  — en sorte que la température dans la plaque est supposée ne dépendre que de  $x$  et  $t$ .

La plaque est située entre les abscisses  $x = 0$  et  $x = L$  et on néglige les pertes latérales par convection ou par rayonnement. Par linéarité de l'équation qui sera établie à la question 1, on supposera que la température (exprimée en degrés Celsius) est nulle partout dans la plaque pour  $t < 0$ .

A l'instant  $t = 0$ , une lampe à infrarouge, placée du côté  $x < 0$ , émet un flash lumineux puissant. Il en résulte un profil de température dans la plaque  $T(x, t = 0)$ , dont la forme sera détaillée plus loin.

1°/ Etablir l'équation différentielle vérifiée par  $T(x, t)$  dans laquelle on fera apparaître le coefficient de diffusion thermique  $D$  que l'on exprimera en fonction des paramètres du problème.

On cherche des solutions sous la forme :  $T(x, t) = f(x) \times g(t)$

2°/ Déterminer deux équations différentielles vérifiées par  $f(x)$  et  $g(t)$ . En déduire la forme générale de la fonction  $T(x, t)$ .

Pour modéliser l'effet de la lampe flash, on utilise le profil de température initial suivant :

$$T(x, 0) = \begin{cases} \frac{\Gamma L}{\delta} & \text{si } 0 \leq x \leq \delta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $\Gamma$ ,  $\delta$ , et  $L$  sont trois constantes. L'évolution est suffisamment rapide pour que la plaque puisse être supposée isolée, en première approximation, pour  $t > 0$ .

3°/ Justifier qu'il faut chercher la solution du problème sous la forme :

$$T(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\alpha_n t) [u_n \cos(k_n x) + w_n \sin(k_n x)]$$

4°/ Exprimer les coefficients  $w_n$ , puis les coefficients  $k_n$  et  $\alpha_n$  en fonction de  $n$ ,  $L$  et  $D$ .

5°/ Etablir l'expression des coefficients  $u_n$  et en déduire que :

$$T(x,t) = \Gamma \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{n\pi\delta}{L})}{\frac{n\pi\delta}{L}} \exp(-\alpha_n t) \cos(k_n x) \right]$$

L'épaisseur  $\delta$  est supposée très petite devant  $L$ . Un capteur optique permet de mesurer la température  $T(L,t)$  de la face arrière de la plaque (située à l'abscisse  $x = L$ ) en fonction du temps  $t$ .

6°/ Déduire de l'expression obtenue à la question précédente, que l'expression approchée de  $T(L,t)$ , pour  $t > 0$ , est :

$$T(L,t) \simeq \Gamma \zeta(t) \quad \text{avec} \quad \zeta(t) = \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp(-\alpha_n t) \right]$$

La figure 1 représente la courbe  $\zeta(t)$  en fonction de  $\alpha_1 t$ .

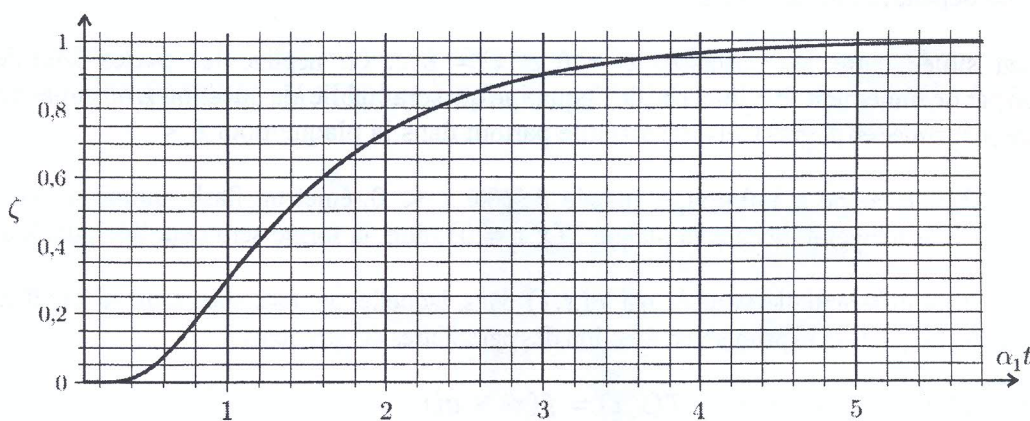


Figure 1

On note  $t_{1/2}$  l'instant en lequel  $\zeta(t_{1/2}) = 1/2$ .

7°/ Exprimer une relation entre  $\alpha_1$  et  $t_{1/2}$ .

La figure 2 représente la courbe expérimentale  $T(L,t)$  (en unité arbitraire) obtenue pour la plaque de cuivre étudiée en  $x = L$  en fonction du temps.



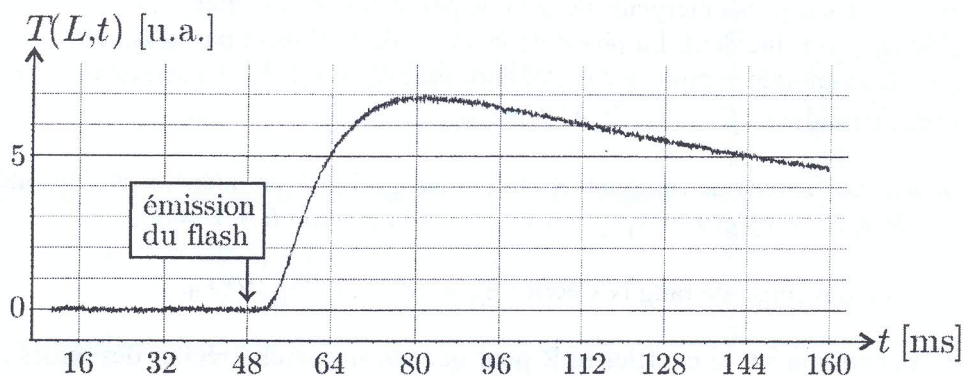


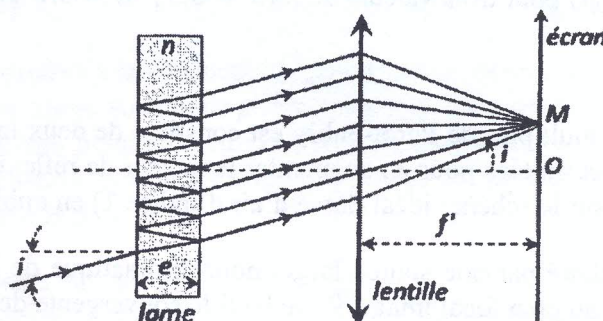
Figure 2

8°/ Estimer la valeur de la conductivité thermique du cuivre.

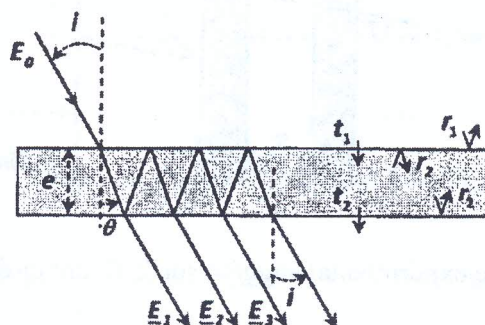
## PROBLEME 2 : Optique Ondulatoire

### Partie I

On considère une lame mince transparente d'épaisseur  $e$  et d'indice  $n$  supposé constant. Cette lame, située dans l'air, d'indice 1, est éclairée par une source lumineuse supposée monochromatique de longueur d'onde dans le vide  $\lambda$ . Cette lame donne des franges d'égale inclinaison à l'infini qu'on peut observer sur un écran placé dans le plan focal image d'une lentille convergente de distance focale image  $f'$ .



1°/ Pour un rayon issu de la source sous l'incidence  $i$ , déterminer la différence de marche  $\delta(M)$  en un point  $M$  de l'écran entre deux rayons consécutifs transmis par la lame en fonction de  $n$ ,  $e$  et  $\theta$  où  $\theta$  désigne l'angle de réfraction dans la lame. En déduire le déphasage correspondant  $\varphi(M)$ .



2°/ On désigne par  $r_1$  et  $t_1$  les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude du dioptré air/lame, et  $r_2$  et  $t_2$  ceux du dioptré lame/air.

On ne s'intéresse pas aux rayons émergents de la lame par réflexion. On note  $E_0$  l'amplitude de l'onde incidente associée au rayon incident. La phase de la 1<sup>ère</sup> onde transmise par la lame est prise comme origine des phases. L'amplitude complexe de cette onde est :  $\underline{E}_1 = t_1 t_2 E_0$ . La deuxième onde transmise aura pour amplitude complexe :  $\underline{E}_2 = t_1 r_2^2 t_2 e^{-j\varphi} E_0$ .

On admettra que les coefficients de réflexion  $R$  et de transmission  $T$  en intensité sont les mêmes pour les deux dioptries :  $R = r_1^2 = r_2^2$  et  $T = t_1 t_2$ . On a toujours la relation  $R + T = 1$ .

L'amplitude de l'onde transmise de rang  $N$  s'écrit :  $\underline{E}_N = R^{N-1} T e^{-j(N-1)\varphi} E_0$ .

2.a°/ Quelle est la condition sur le coefficient  $R$  pour que les amplitudes réelles des ondes transmises successives soient presque égales ?

2.b°/ Exprimer l'amplitude complexe  $\underline{E}_T$  résultante de la superposition de toutes les ondes transmises par la lame.

3°/ Montrer que l'intensité  $I(M)$  au point  $M$  de l'écran d'observation est de la forme :

$$I(M) = \frac{I_0}{1 + m_0 \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

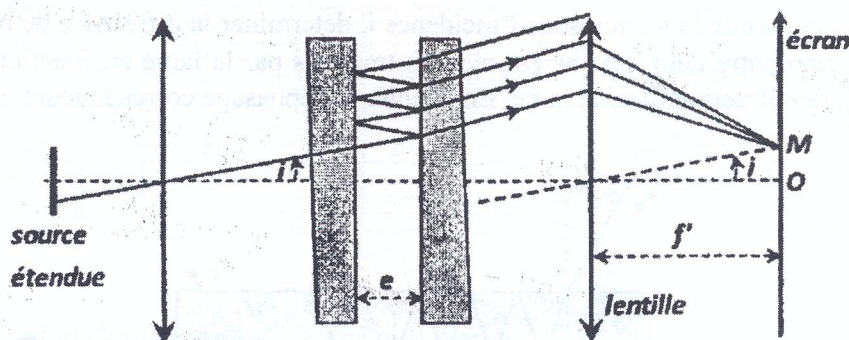
Donner l'expression de  $I_0$  et exprimer de  $m_0$  en fonction de  $R$ .

4°/ Pour quelles valeurs de  $\varphi$  l'intensité  $I$  est-elle maximale (notée  $I_{max}$ ) et minimale (notée  $I_{min}$ ) ? Tracer alors l'allure de  $I(\varphi)$  pour trois valeurs de  $R$  ( $R = 0,5$  ;  $R = 0,9$  et  $R = 0,99$ ).

## Partie II

L'interféromètre à ondes multiples de Pérot-Fabry est constitué de deux lames de verre dont les faces en regard sont parallèles et traitées pour en augmenter le facteur de réflexion. Nous supposons qu'il est possible de raisonner sur le schéma idéal (lame d'air d'indice 1) en oubliant l'épaisseur des lames.

L'interféromètre étant éclairé par une source large monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$ . L'écran d'observation étant placé au plan focal image d'une lentille convergente de distance focale  $f'$ .



5°/ Justifier le choix du montage expérimental suggéré sur la figure ci-dessus.

6°/ Donner la différence de phase entre deux rayons transmis consécutifs et justifier que les franges d'interférences sont des anneaux.



7°/ Soit  $p_0$  l'ordre au centre des anneaux. On note  $p_0 = q + \varepsilon$ , où  $q$  entier et  $0 < \varepsilon < 1$ .  
 7.a°/ Exprimer le rayon  $\rho_n$  sur l'écran du  $n^{\text{ème}}$  anneau brillant compté à partir du centre, en supposant l'angle  $i_n$  correspondant petit.

7.b°/ Application numérique : Calculer  $\rho_2$  sur l'écran du 2<sup>ème</sup> anneau brillant.  
 On donne :  $f' = 50\text{cm}$ ;  $e = 10\text{mm}$  et  $\lambda = 546,1\text{nm}$ .

8°/ Le contraste des franges est défini par :  $C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$

8.a°/ Exprimer le contraste  $C$  des franges en fonction de  $m_0$  puis en fonction de  $R$ .

8.b°/ Calculer  $C$  pour les trois cas numériques précédents. Commenter.

9°/ On définit la finesse  $F$  de l'appareil par :  $F = \frac{2\pi}{\Delta\varphi}$ .

9.a°/ Déterminer la largeur à mi-hauteur  $\Delta\varphi$  de la courbe  $I(\varphi)$  au voisinage d'un maximum et montrer qu'elle s'écrit sous la forme :  $\Delta\varphi = \frac{2(1-R)}{\sqrt{R}}$

En déduire la finesse  $F$ .

9.b°/ Calculer  $F$  pour les trois cas numériques précédents. Commenter.

9.c°/ Pour distinguer deux interféromètres de Fabry-Pérot, vaut-il mieux les caractériser par leur contraste ou par leur finesse ?

10°/ L'interféromètre étant éclairé par une onde lumineuse monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$ . On observe sur l'écran des anneaux dont le rayon  $\rho$  vérifie la relation :  $\rho^2 = f'^2 \left( 2 - p \frac{\lambda}{e} \right)$  (où l'entier  $p$  désigne l'ordre d'interférences de l'anneau).

En mesurant le carré des rayons des anneaux à différents ordres, proposer une méthode pratique permettant de déterminer la longueur d'onde  $\lambda$  connaissant les valeurs de  $f'$  et  $e$ .

11°/ L'interféromètre étant éclairé par une source émettant deux longueurs d'onde très proches (cas du doublet du sodium)  $\lambda$  et  $\lambda + \Delta\lambda$  avec  $\Delta\lambda \ll \lambda$ .

On admet qu'on pourra distinguer les deux systèmes d'anneaux, à l'ordre  $p$ , à condition que la différence de phase entre eux est plus grande que la largeur à mi-hauteur  $\Delta\varphi$  d'un anneau défini précédemment.

11.a°/ Donner alors la plus petite différence de longueur d'onde  $\Delta\lambda_{\min}$  mesurable en fonction de  $\lambda$ ,  $F$  et  $p$ .

11.b°/ On définit le pouvoir de résolution de l'instrument par :  $R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda_{\min}}$

Exprimer  $R$  en fonction de  $p$  et  $F$ .

## PROBLEME 3 : MECANIQUE QUANTIQUE

### PARTIE 1

On considère une particule libre non relativiste se déplaçant selon l'axe  $Ox$  à la vitesse  $v_0 = p_0/m$ . Sa fonction d'onde normalisée s'écrit :

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) \exp(i(kx - \omega(k)t)) dk$$

$$g(k) = \left(\frac{2\sigma^2}{\pi}\right)^{1/4} \exp(-\sigma^2(k - k_0)^2)$$

$g(k)$  a la forme d'une gaussienne centrée sur  $k = k_0$  dont la mi-largeur à hauteur sur  $\sqrt{e}$  est prise égale à  $\Delta k = 1/(\sigma\sqrt{2})$ , de sorte que lorsque  $k$  varie de  $k_0$  à  $\pm \Delta k$ , sa valeur maximale  $g(k_0)$  est réduite d'un facteur  $\sqrt{e}$ .

On donne les intégrales suivantes :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\sigma^2(u + v))^2 du = \frac{\sqrt{\pi}}{\sigma} \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \exp(-bu^2) du = \frac{1}{2b} \sqrt{\frac{\pi}{b}}$$

1°/ Pourquoi l'état quantique d'une particule libre doit être décrit par un paquet d'onde et non pas par une onde plane.

2°/ Donner l'expression de la densité linéique de probabilité  $\rho(x, t = 0)$  à l'instant initial. Tracer son allure et discuter physiquement ce résultat. Donner en particulier la position du centre du paquet d'ondes ainsi que sa largeur  $\Delta x_0$ . A quoi correspond physiquement cette largeur ? Comment évolue la localisation de la particule avec  $\Delta x_0$  ?

3°/ Exprimer  $|g(k)|^2$  et discuter le sens physique de cette grandeur. En procédant comme en (1), donner l'expression de sa largeur  $\Delta k$  et discuter physiquement ce résultat.

4°/ Vérifier la relation d'incertitude d'Heisenberg.

5°/ Donner l'expression de  $\psi(x, t)$ . On ne cherchera pas à calculer l'intégrale.

En tenant compte de la relation de dispersion  $\omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m}$  le calcul complet (non demandé ici) conduit à une densité de probabilité donnée par :

$$\rho(x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma \frac{1}{\left[1 + \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2 \sigma^4}\right]} \exp \left[ -\frac{\left(x - \frac{\hbar k_0 t}{m}\right)^2}{2\sigma^2 \left(1 + \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2 \sigma^4}\right)} \right]$$

6°/ Quelle est la position  $x_c$  du centre de cette gaussienne ? Ce résultat était-il prévisible ?

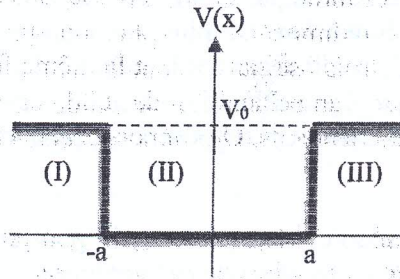
7°/ Exprimer la largeur  $\Delta x(t)$  de  $\rho(x, t)$  à l'instant  $t$  en fonction de  $\Delta x_0$ . Conclure sur l'évolution du paquet d'onde entre 0 et  $t$ .



## PARTIE 2

Une particule de masse  $m$  est placée dans un puits de potentiel modélisé par la fonction suivante :

$$\begin{cases} V(x) = 0 & \text{pour } -a < x < +a \\ V(x) = V_0 & \text{pour } |x| > a \end{cases}$$



On donne l'équation de Schrödinger pour une particule de masse  $m$  dans le potentiel  $V(x)$  :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(x, t) + V(x) \psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t}$$

1°/ On commence par envisager le cas d'une particule classique se déplaçant dans le sens des  $x$  croissants ( $E > V_0$ ). Décrire le mouvement de cette particule dans chacun des trois zones. On donnera en particulier la vitesse de déplacement de la particule classique.

On s'intéresse dans ce qui suit aux états liés. De plus les solutions de l'équation de Schrödinger s'écrivent sous la forme :  $\psi(x, t) = \varphi(x) e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$ .

2°/ Qu'appelle-t-on cet état. Justifier votre réponse.

3°/ Quelles sont les valeurs limites possibles de l'énergie ?

4°/ Ecrire l'équation de Schrödinger indépendante du temps dans les différentes zones et donner les expressions des fonctions d'onde dans les trois zones de l'espace.

On posera :  $k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$  et  $k_2 = \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}$ .

5°/ Etablir la relation suivante :  $(ak_1)^2 + (ak_2)^2 = \frac{2ma^2V_0}{\hbar^2}$  (Eq. 1)

6°/ Vue la forme du potentiel, on admet que les fonctions d'onde des états stationnaires sont soit paires, soit impaires. En déduire les relations :

$$ak_2 = ak_1 \tan(ak_1) \quad (\text{Eq. 2})$$

$$ak_2 = -ak_1 \cot(ak_1) \quad (\text{Eq. 3})$$

7°/ On pose  $X = ak_1$  et  $Y = ak_2$ . Tracer qualitativement les solutions graphiques de ces trois équations et interpréter graphiquement les solutions dans le plan de coordonnées  $(X, Y)$ .

8°/ Existe-t-il toujours des états liés ? A quelle condition existe-t-il un seul état lié ?

9°/ Que deviennent les solutions dans le cas où le puits devient très profond ? Vérifier ce résultat à l'aide d'un calcul simple des états liés correspondants à un puit de potentiel infini.



## PROBLEME 4 : THERMODYNAMIQUE STATISTIQUE

Formulaire :  $\sum_{n=0}^{+\infty} n e^{-\alpha n} = \frac{1}{4 \operatorname{sh}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$  pour  $\alpha > 0$   $(\coth(x))' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2(x)}$

Le modèle d'Einstein, datant de 1907, consiste à assimiler les atomes du solide à des oscillateurs harmoniques quantiques indépendants. Comme chaque atome se déplace dans 3 directions, il lui correspond 3 oscillateurs harmoniques à 1 dimension. De plus, on suppose pour simplifier les trois directions  $x$ ,  $y$  et  $z$  équivalentes, donc ces trois oscillateurs ont la même fréquence. Cette fréquence est identique pour tous les atomes. Finalement, un échantillon de solide de  $N$  atomes est équivalent à  $3N$  oscillateurs harmoniques identiques et indépendants. On supposera cet échantillon en équilibre avec un thermostat de température  $T$ .

1°/ Dans le cas classique, De combien de variables a-t-on ici besoin pour décrire l'état d'un atome ? Exprimer alors l'énergie mécanique de l'atome en fonction de ces variables.

2°/ A l'aide du théorème d'équipartition de l'énergie, montrer que l'énergie moyenne de l'atome est :  $\langle \epsilon \rangle = 3k_B T$

3°/ En déduire que la capacité calorifique molaire du solide est :  $C_{V,m} = 3R$  ; avec  $R = k_B N_A$ . Quel nom porte ce résultat ?

La physique quantique prévoit que l'énergie d'un oscillateur harmonique est quantifiée. Nous admettons que les niveaux d'énergie d'un oscillateur harmonique 1D de pulsation propre  $\omega$  sont donnés par la relation suivante :

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega \quad ; \quad n \geq 0 \quad (n \text{ entier})$$

4°/ Montrer que la fonction de partition  $z(T)$  d'un oscillateur 1D s'écrit :

$$z(T) = \frac{1}{2 \operatorname{sh}\left(\frac{\hbar \omega}{2k_B T}\right)}$$

5°/ Donner alors l'expression générale de la probabilité d'occupation  $p_n$  du niveau d'énergie  $E_n$ .

6°/ Montrer que l'énergie moyenne d'un oscillateur 1D est :

$$\langle \epsilon_{1D} \rangle = \frac{\hbar \omega}{2} \coth\left(\frac{\hbar \omega}{2k_B T}\right)$$

Un atome étant assimilé à un oscillateur 3D, on admet que chaque degré de liberté en position  $(x, y, z)$  contribue de manière identique à l'énergie de l'atome. L'énergie moyenne d'un atome est alors donnée par la relation suivante :  $\langle \epsilon \rangle = 3\langle \epsilon_{1D} \rangle$ .

7°/ On note  $n$  le nombre de moles d'atomes dans le solide. Donner  $\langle E \rangle$ , l'énergie moyenne du solide, en fonction de  $n$ ,  $N_A$  (Nombre d'Avogadro) et  $\langle \epsilon_{1D} \rangle$ .

8°/ Montrer que la capacité calorifique molaire du solide est :

$$C_{V,m} = 3R \left(\frac{u/2}{\operatorname{sh}(u/2)}\right)^2 \quad ; \quad \text{avec } u = \frac{\hbar \omega}{k_B T} \text{ et } R = k_B N_A$$

Que vaut la capacité calorifique à basse température ? A haute température ? Quel résultat retrouve-t-on ? Exprimez la température caractéristique de la transition entre ces deux régime, notée  $\theta_D$ , en fonction de  $\hbar$ ,  $\omega$  et  $k_B$ .