INSTITUT PRÉPARATOIRE
AUX ÉTUDES D'INGÉNIEUR
SFAX
Département de la Préparation
Mathématiques Physique

MP 2
Avril 2021

Durée : 2h

Devoir de contrôle N°2
ANALYSE

Problème

On s'intéresse ici à des suites et séries de fonctions en liaison avec des intégrales. Dans la partie **I**, on calcule indépendamment deux intégrales particulières (les questions 1 et 2 pour l'une, la question 3 pour l'autre) qui interviennent dans les parties **II** et **III**. Les parties **II** et **III** sont **indépendantes** .

Partie I : Calculs préliminaires

1. (a) Justifier l'existence de l'intégrale $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} dt$.

   (b) Pour tout $A > 0$, Justifier l'existence de l'intégrale $D(A) = \displaystyle\int_0^{A} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

   (c) Montrer que $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} D(A) = K$.

2. (a) Justifier que l'application $L : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} e^{-tx} dt$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

   (b) Établir que l'application L est de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

   (c) Justifier que les fonctions $t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ et $t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t}$ sont bornées sur $]0,+\infty[$ puis déduire les limites de L et L' en $+\infty$.

   (d) Pour tout $x > 0$, calculer explicitement $L''(x)$.

   (e) En déduire $L'(x)$ puis $L(x)$ pour $x \geq 0$. Conclure que $K = \dfrac{\pi}{2}$.

3. (a) Justifier que la fonction $u \mapsto \dfrac{\ln(u)}{u-1}$ est intégrable sur $]0,1[$.

   (b) Pour $k \in \mathbb{N}$, Justifier l'existence et calculer $\displaystyle\int_0^1 u^k \ln(u) du$.

   (c) Montrer alors que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(u)}{u-1} du = \frac{\pi^2}{6}$.

   On donne sans le justifier : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Partie II : Étude de suites d'intégrales

1. On considère ici une application continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

   (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 f(t^n)\,dt$. Déterminer $\lim_{n\to\infty} I_n$.

   (b) On suppose ici de plus que $u \mapsto \dfrac{f(u)}{u}$ est intégrable sur $]0,1]$. Déterminer $\lim_{n\to\infty} nI_n$.

   (c) Déterminer alors un équivalent simple de $J_n = \int_0^1 \sin(t^n)\,dt$.

2. Pour tout $n \geq 2$, et tout $A > 1$, on pose $G_n(A) = \int_1^A \sin(t^n)\,dt$.

   (a) Montrer que $G_n(A) = \dfrac{1-\cos(A^n)}{nA^{n-1}} - \dfrac{1-\cos(1)}{n} + \dfrac{n-1}{n^2}\displaystyle\int_1^{A^n} \frac{1-\cos(u)}{u^2} u^{\frac{1}{n}}\,du$.

   (b) En déduire que $G_n(A)$ a une limite quand $A \to +\infty$, prouvant l'existence de $\int_1^{+\infty} \sin(t^n)\,dt$.

   (c) En conclure que $\lim_{n\to\infty} n\int_0^{+\infty} \sin(t^n)\,dt = K$.

Partie III : Étude de séries de fonctions

1. Soit f une application réelle continue et croissante sur $[0,1[$ avec $f(0)=0$ et telle que l'application $u \mapsto \dfrac{f(u)}{u}$ soit intégrable sur $]0,1[$.

   (a) Justifier l'existence de $G(x) = \int_0^{+\infty} f(x^t)\,dt$ et que $G(x) = -\dfrac{1}{\ln(x)}\displaystyle\int_0^1 \frac{f(u)}{u}\,du$, $x \in]0,1[$.

   (b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'encadrement : $\int_n^{n+1} f(x^t)\,dt \leq f(x^n) \leq \int_{n-1}^n f(x^t)\,dt$.

   (c) En déduire l'existence de $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f(x^n)$ pour $x \in]0,1[$, ainsi qu'un encadrement de $F(x)$ par deux intégrales dépendant de x.

   (d) Conclure que $\lim_{x\to 1}(1-x)F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{f(u)}{u}\,du$.

2. Pour $x \in]-1,1[$, on pose $H(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1-x^n)$.

   (a) Montrer que H est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[$ et donner l'expression de sa dérivée.

   (b) Montrer que, pour tout $x \in]0,1[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{1-x^n}{1-x} \leq n$. Puis en déduire que $\lim_{x\to 1}(1-x)H'(x) = +\infty$

   (c) Montrer que $\lim_{x\to 1}(1-x)H(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(u)}{u-1}\,du$.

   (d) Par une méthode similaire à celle de la question (Partie III 1.) ,montrer que

   $$\lim_{x\to 1}\left((1-x)^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{1-x^n}\right) = \int_0^1 \frac{\ln(u)}{u-1}\,du$$

   En déduire que $\lim_{x\to 1}(1-x)^2 H'(x) = \dfrac{\pi^2}{6}$.