UNIVERSITÉ DE SFAX

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Institut Préparatoire aux Études
d'Ingénieurs de Sfax

Année universitaire : 2020/2021

Examen d'Analyse
MP 2

Date : 31/05/2021 Durée : 4 heures Nombre de pages : 5

Exercice

Dans une grande surface, on organise un jeu. Ainsi, chaque client qui entre dans le magasin tire aléatoirement un billet. Chaque billet permet de gagner un lot avec la probabilité $p \in]0,1[$. On suppose que les tirages sont indépendants et on admet que le nombre N de billets choisis par les clients est une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de billets gagnants au cours d'une journée. On admet l'existence d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ modélisant cette situation.
Pour que l'opération soit rentable, le gérant souhaite que la probabilité de gangner au moins deux lots durant une journée soit faible. On considère donc un réel $\alpha \in]0,1[$ et on souhaite réaliser la condition

$$P(X \geq 2) \leq 1 - \alpha.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant que $Y = n$.
2. En déduire que X suit la loi de Poisson de paramètre λp.
3. Donner l'espérence et la variance de X.
4. En précisant l'inégalité utilisée, montrer que l'on a :

$$p \leq \frac{2(1-\alpha)}{\lambda} \Longrightarrow P(X \geq 2) \leq 1 - \alpha.$$

Dans la suite, on pourra utiliser sans démonstration la formule de Stirling suivante

$$n! \underset{n \to +\infty}{\sim} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}.$$

Problème 1

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = xe^x, \quad x \in [-1, +\infty[.$$

La fonction Γ de Riemann est définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0.$$

Partie I

1. Montrer que f réalise une bijection de l'intervalle $[-1,+\infty[$ sur $[-e^{-1},+\infty[$. Dans la suite du problème, on note W la fonction réciproque de f.
2. Justifier que W est continue sur $[-e^{-1},+\infty[$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-e^{-1},+\infty[$.
3. Montrer que $W(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ et $W(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)$.
4. Pour quelles valeurs du réel α l'intégrale $\int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{W(x)}{x^\alpha}dx$ converge.
5. Vérifier que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x>0$.
6. Déduire que :

$$\forall \alpha \in]1,2[, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{W(x)}{x^\alpha}dx = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{(\alpha-1)^{3-\alpha}}.$$

Partie II

On admet l'identité suivante

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall y\in\mathbb{R}, \forall b\in\mathbb{R}, \quad ny^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} C_n^k(-kb)^{k-1}(y+kb)^{n-k}.$$

On définit une suite $(a_n)_{n\geq 1}$ en posant

$$a_n = \frac{(-n)^{n-1}}{n!}, \quad n\in\mathbb{N}^*.$$

On définit, en cas où c'est possible, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$.
2. Montrer que S est définie et continue sur $[\frac{-1}{e}, \frac{1}{e}]$.
3. Vérifier que S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]\frac{-1}{e}, \frac{1}{e}[$.
4. Démontrer que :

$$\forall x\in]\frac{-1}{e}, \frac{1}{e}[, \quad x\big(1+S(x)\big)S'(x) = S(x).$$

5. On pose $H(x) = S(x)e^{S(x)}$ pour tout $x\in[\frac{-1}{e}, \frac{1}{e}]$.

   (a) Vérifier que : $xH'(x) - H(x) = 0$ pour tout $x\in]\frac{-1}{e}, \frac{1}{e}[$.

   (b) Chercher les fonctions dérivables $y :]\frac{-1}{e}, \frac{1}{e}[\longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

   $$xy' - y = 0.$$

   (On commence par chercher les solutions sur $]\frac{-1}{e}, 0[$ puis sur $]0, \frac{1}{e}[$.)

   (c) En déduire que :

   $$\forall x\in[\frac{-1}{e}, \frac{1}{e}], \quad H(x) = x.$$

6. (a) Calculer $S(\frac{-1}{e})$ et déduire que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-1}e^{-n}}{n!} = 1.$$

(b) Montrer que :

$$\forall x \in [\frac{-1}{e}, \frac{1}{e}], \quad S(x) \geq -1.$$

(c) Conclure que :

$$\forall x \in [\frac{-1}{e}, \frac{1}{e}], \quad W(x) = S(x).$$

7. Démontrer que :

$$\forall x \in \big[-W(e^{-1}), W(e^{-1})\big], \quad \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}n^{n+k-1}}{n!k!}x^{n+k} = x.$$

Problème 2

Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et suivant la même loi définie par

$$P(X_n = 1) = 1 - P(X_n = -1) = p$$

où p est un réel de l'intervalle $]0, 1[$.
On pose

$$S_0 = 0 \text{ et } S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = P(S_n = 0)$ de telle sorte que $u_0 = 1$.

Partie I

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Vérifier que $u_{2n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{2n} = C_{2n}^{n}p^n(1-p)^n.$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \dfrac{1+X_n}{2}$.

(a) Montrer que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la même loi de Bernouilli de paramètre p.

(b) On pose $Z_m = Y_1 + \ldots + Y_m$, $m \in \mathbb{N}^*$.
Donner la loi de Z_m pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.

(c) Exprimer S_n en fonction de Z_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ puis retrouver le résultat de la question 3.

Partie II

1. Déterminer le rayon de convergence R_p de la série entière $\sum_{n\geq 0} u_n x^n$.

2. Vérifier que $R_p \geq 1$.

   On pose

$$F_p(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n, \quad x \in]-R_p, R_p[.$$

3. Vérifier que :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{C_{2n}^n}{4^n} x^{2n}.$$

4. En déduire que :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad F_p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4p(1-p)x^2}}.$$

Partie III

On considère la variable aléatoire T définie par

$$T = \min\left\{n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } S_n = 0\right\}$$

lorsque l'ensemble $\left\{n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } S_n = 0\right\}$ est non vide. Sinon, si $S_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ alors on pose $T = 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = P(T = n)$.

1. Calculer v_1 et v_2.

2. Que vaut v_{2n+1}, $n \in \mathbb{N}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   (a) Vérifier que : $P(X_1 + \ldots X_{n-k} = 0) = P(X_{k+1} + \ldots + X_n = 0)$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$.

   (b) Montrer que : $P(S_n = 0) = \sum_{k=1}^{n} P\left(\{S_n = 0\} \cap \{T = k\}\right)$.

4. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k v_{n-k}.$$

Partie IV

1. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} v_n x^n$ converge normalement sur $[-1, 1]$.

   On pose alors $H_p(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n, \quad x \in [-1, 1]$.

2. Montrer que :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad F_p(x) H_p(x) = (v_0 + 1) F_p(x) - 1.$$

3. Déduire que :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad H_p(x) = v_0 + 1 - \sqrt{1-4p(1-p)x^2}.$$

4. Détermier v_0.

Dans la suite de cette partie, on suppose que $p = \frac{1}{2}$.

5. (a) Montrer que $T \geq 1$ presque sûrement.

   (b) Rappeler le développement en série entière de la fonction $x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$ sur $]-1,1[$.

   (c) Déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{2n} = 2\frac{C_{2n-2}^{n-1}}{n4^n}.$$

   (d) Montrer que T n'est pas d'espérance finie.

6. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'événement

$$B_n = \{S_k \neq 0 : \quad \forall k \in [\![1,n]\!]\}.$$

   (a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{2n} = u_{2n-2} - u_{2n}.$$

   (b) Exprimer B_{2n} à l'aide des événements $(T = k)$, $k = 1, ..., 2n$ et déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(B_{2n}) = u_{2n}.$$