

EXAMEN DE MECANIQUE DES SOLIDES INDEFORMABLES (M.S.I.)

Section : MP2, PC2 & PT2

Date : 02 /06/2021

Aucun document n'est autorisé

N.B. Cette partie doit être rédigée sur un cahier séparé à rendre obligatoirement même sans réponses

Dans un système automatisé de production, les produits à emballer subissent des opérations de transfert d'un poste à un autre. Ses opérations sont assurées par des convoyeurs.

Dans cette partie on se propose d'étudier le mécanisme d'un galet ralentisseur placée dans un convoyeur destiné au ralentissement du mouvement d'une palette P chargée par l'un des produits emballés. Le mouvement du mécanisme est ramené dans le plan $(O_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ de normale (O, \vec{x}_0) . Le schéma cinématique du mécanisme est représenté par la Figure.1.

Le système est principalement constitué des solides suivants :

- (S_0) solide fixe par rapport à la terre.
- (S_1) solide en liaison glissière d'axe (O_0, \vec{z}_0) avec (S_0) .
- (S_2) cylindre homogène creux d'axe (O, \vec{x}_0) , de longueur L_2 , de rayon intérieur r_2 et de rayon extérieur R_2 , en liaison pivot d'axe (O, \vec{x}_0) avec le solide (S_1) .
- (S_3) solide en liaison pivot d'axe (O, \vec{x}_0) avec le solide (S_1) .
- (S_4) solide en liaison pivot d'axe (A, \vec{x}_0) avec le solide (S_3) .
- (S_5) solide, représentant la palette P, en mouvement de translation rectiligne par rapport à (S_0) suivant la direction \vec{y}_0 . Le contact entre (S_5) et (S_2) est supposé ponctuel sans glissement de normale (C, \vec{z}_0) .

Le mécanisme comporte deux ressorts :

- Ressort 9 attaché par ces deux extrémités B et G aux solides (S_3) et (S_4) .
- Ressort 23 monté entre les deux solides (S_0) et (S_1) .

Repères et paramètres de position (Figure 1 et Figure 2)

On considère les repères orthonormés directs suivants :

- $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ repère galiléen associé au solide (S_0) .
- $R_1(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ repère associé au solide (S_1) tel que $\overrightarrow{O_0O} = \lambda(t)\vec{z}_0$.
- $R_2(O, \vec{x}_0, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ repère associé au solide (S_2) tel que $\varphi(t) = (\vec{y}_0, \vec{y}_2) = (\vec{z}_0, \vec{z}_2)$.
- $R_3(O, \vec{x}_0, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ repère associé au solide (S_3) tel que $\theta(t) = (\vec{y}_0, \vec{y}_3) = (\vec{z}_0, \vec{z}_4)$ et $\frac{\dot{\theta}}{\dot{\varphi}} = k$ (k : constante positive donnée).
- $R_4(O', \vec{x}_0, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$ repère associé au solide (S_4) tel que $\Psi = (\vec{y}_3, \vec{y}_4) = (\vec{z}_3, \vec{z}_4)$ (Ψ : angle supposé constant).
- La translation de (S_5) par rapport à (S_0) est paramétrée par $y(t)$ suivant \vec{y}_0 .

Pour paramétrer le contact, supposé ponctuel en I entre les solides (S_2) et (S_4) , on introduit la base orthonormée directe $(\vec{x}_0, \vec{t}, \vec{n})$ où \vec{n} est le vecteur normal en I au plan tangent commun entre (S_2) et (S_4) et tel que $\alpha = (\vec{y}_4, \vec{t}) = (\vec{z}_4, \vec{n})$.

On donne : $\vec{OC} = R_2 \vec{z}_0$; $\vec{OI} = r_2 \vec{n}$; $\vec{OA} = r \vec{y}_3$; $\vec{AO'} = -a \vec{y}_4$; $\vec{AI} = -a \vec{y}_4 + b \vec{z}_4$
 $\vec{AG} = -c \vec{y}_4$; où a, b, c, r, r_2 et R_2 sont des constantes positives données.

I. ETUDE CINEMATIQUE

I.1. Déterminer les torseurs cinématiques associées aux mouvements suivants :

- a) mouvement de (S_2) par rapport à (S_1) au point O : $\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\}_O$.
- b) mouvement de (S_3) par rapport à (S_1) au point O : $\{\mathcal{V}(S_3/S_1)\}_O$.
- c) mouvement de (S_4) par rapport à (S_1) au point A : $\{\mathcal{V}(S_4/S_1)\}_A$.

I.2.. En déduire les vecteurs des vitesses suivantes :

- a) $\vec{V}(C \in S_2/S_1)$ exprimé dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.
- b) $\vec{V}(I \in S_2/S_1)$ exprimé dans la base $(\vec{x}_0, \vec{t}, \vec{n})$.
- c) $\vec{V}(G \in S_4/S_1)$ exprimé dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$.
- d) $\vec{V}(O \in S_4/S_1)$ exprimé dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.
- e) $\vec{V}(I \in S_4/S_1)$ exprimé dans la base $(\vec{x}_0, \vec{t}, \vec{n})$, (utiliser le point O)

- I.3. a) Montrer que : $\vec{V}(I \in S_4/S_2) = -r_2 \dot{\phi} (1 + k) \vec{t}$.
b) Ecrire la condition de roulement sans glissement au point C .

II. ETUDE ENERGETIQUE

Durant le ralentissement du mouvement du solide (S_5) , le point O du repère $R_1(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est supposé maintenu fixe dans le repère $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. Ceci conduit à considérer que le repère $R_1(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est galiléen.

Nous supposons dans cette partie les hypothèses suivantes :

- A l'exception des solides (S_2) , (S_4) et (S_5) , les masses des autres solides et des deux ressorts sont supposées négligeables.
- La masse m_4 du solide (S_4) est concentrée au point G .
- Le solide (S_2) est de masse m_2 . Son moment d'inertie par rapport à l'axe (O, \vec{x}_0) est noté par I_2 .
- L'action mécanique du champ de la pesanteur est négligeable.

Nous admettons l'écriture des torseurs des actions mécaniques suivantes :

- L'action mécanique exercée par la palette (S_5) sur (S_2) est définie au point C par le torseur glisseur $\{\tau(S_5 \rightarrow S_2)\}_C = \left\{ \begin{matrix} -N_c \vec{z}_0 + T_c \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_C$ avec $N_c > 0$ et $T_c > 0$.
- L'action mécanique exercée par (S_4) sur (S_2) est définie au point I par le torseur glisseur $\{\tau(S_4 \rightarrow S_2)\}_I = \left\{ \begin{matrix} N_I \vec{n} + T_I \vec{t} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_I$ avec $N_I > 0$. Le signe de T_I est à déterminer.

- Le coefficient d'adhérence au point de contact C entre le solide (S_5) et le solide (S_2) est noté par f_c .
- Le coefficient de frottement au point de contact I entre le solide (S_4) et le solide (S_2) est noté par f_I .
- Toutes les autres liaisons sont considérées parfaites.

On considère le système Σ composé par les solides $\{S_2, S_3, S_4, \text{ressort 9}\}$.

- II.1. En appliquant la loi de Coulomb pour le frottement de glissement au point de contact I entre (S_4) et (S_2), écrire la relation entre les composantes N_I et T_I du torseur d'action mécanique de (S_4) sur (S_2).
- II. 2. Déterminer la puissance développée par les actions mécaniques extérieures appliquées sur le système Σ au cours de son mouvement par rapport au repère $R_1(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.
- II.3. Déterminer la puissance développée par les actions mutuelles entre les solides du système Σ .
- II.4. Déterminer l'énergie cinétique du système Σ dans son mouvement par rapport au repère $R_1(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.
- II.5. Ecrire l'équation scalaire traduisant le théorème de l'énergie cinétique appliqué au système Σ au cours de son mouvement par rapport au repère $R_1(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

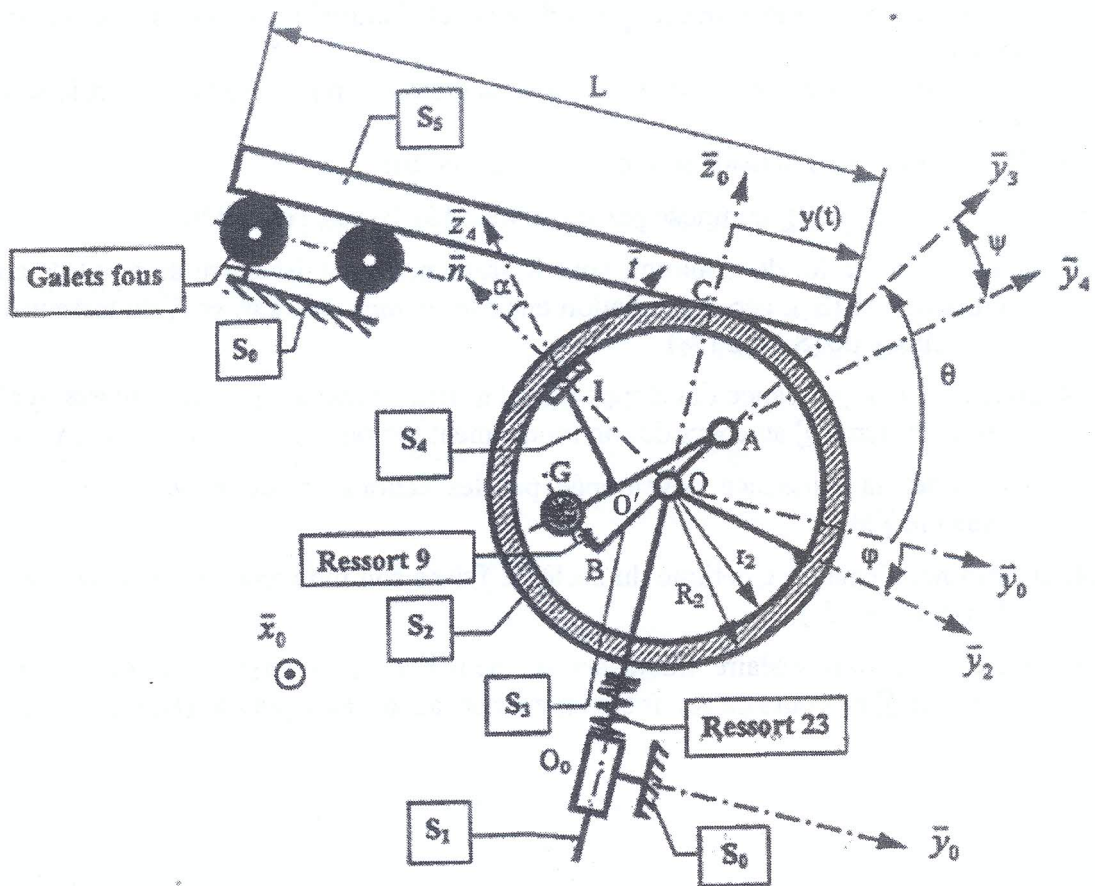


Figure 1. Schéma cinématique relatif à la position de ralentissement

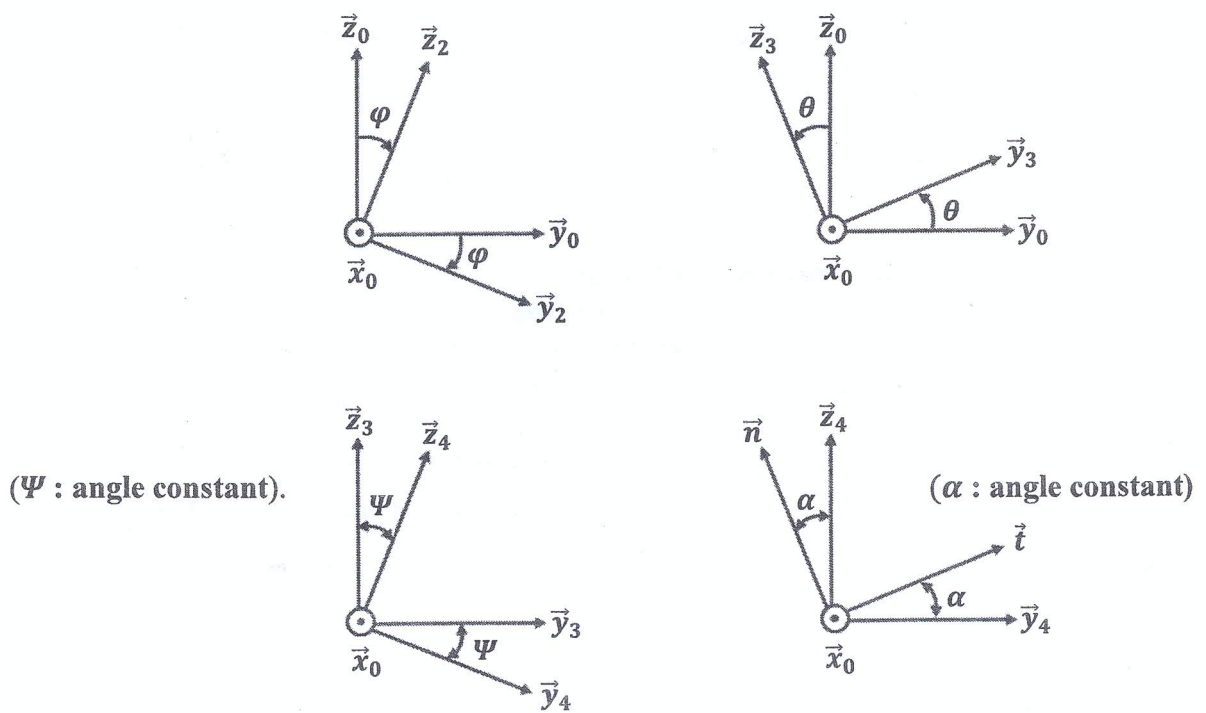


Figure 2. Positions relatives des bases des repères

Examen d'Automatique

Asservissement en position d'un arbre de commande

On s'intéresse à l'asservissement en position d'un arbre de commande dont le schéma fonctionnel est donné par la Figure 1.

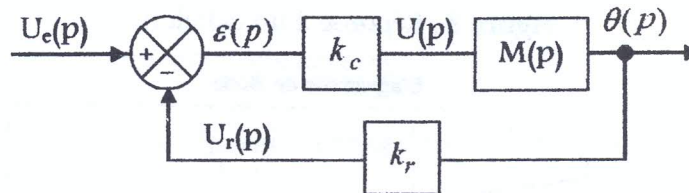


Figure 1 : Asservissement en position de l'arbre de commande

On utilisera les notations et les données suivantes :

- k_c : gain du correcteur à action proportionnelle,
- $k_r = 2V / rd$: gain du capteur de position monté sur l'arbre de commande,
- $M(p) = \frac{\theta(p)}{U(p)}$: fonction de transfert du moteur.

Le moteur électrique est un moteur à courant continu dont les équations caractéristiques sont les suivantes :

$$\begin{cases} u(t) = R i(t) + k_e \frac{d\theta(t)}{dt} & (1) \\ J_e \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = k_a i(t) & (2) \end{cases}$$

Avec : - $u(t)$: tension appliquée aux bornes du moteur,

- $i(t)$: courant d'induit,

- R : résistance de l'induit $R = 2 \Omega$,

- J_e : inertie de l'arbre de commande $J_e = 6,25 \cdot 10^{-4} \text{ kg.m}^2$,
- k_e : constante de force contre électromotrice $k_e = 0,05 \text{ V/(rad/s)}$,
- k_a : constante de couple $k_a = 0,05 \text{ Nm/A}$,
- $\theta(t)$: angle de rotation de l'arbre de commande (en $^\circ$).

On considère les conditions initiales nulles et la transformée de Laplace d'une fonction temporelle $f(t)$ sera notée $F(p)$.

Performances exigées .

- Stabilité : marge de phase $M\phi \geq 45^\circ$. Pas de dépassement en réponse à un échelon.
- Précision : pas d'écart de position.
- Rapidité : temps de réponse à 5% global du système à une consigne d'entrée de type échelon inférieur à 1s.

Travail demandé

1. Déterminer la fonction de transfert du moteur électrique, $M(p) = \frac{\theta(p)}{U(p)}$, et montrer

qu'elle peut se mettre sous la forme suivante : $M(p) = \frac{K_m}{p(1 + \tau_m p)}$.

2. Donner les expressions littérales de K_m et τ_m . Calculer les valeurs de K_m et τ_m .
3. Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte $T(p)$ et en déduire l'expression de son gain statique, noté K_{BO} , en fonction de K_m , k_c et k_r .
4. Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée $F(p)$ et montrer qu'elle peut se mettre sous la forme canonique d'un système du second ordre .

$$F(p) = \frac{K_{BF}}{1 + 2\frac{\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Déduire l'expression littérale de K_{BF} en fonction de k_r et celles de ξ et ω_0 en fonction de K_{BO} et τ_m .

5. Analyse des performances

5.1. Déterminer, en fonction de τ_m , l'expression du gain K_{BO} de telle sorte que la réponse à une entrée de type échelon soit la plus rapide possible sans toutefois produire de dépassement.

5.2. En déduire l'expression du gain k_c de l'action proportionnelle du correcteur en fonction de k_r , K_m et τ_m .

5.3. Montrer qu'avec k_c choisie précédemment, la fonction de transfert en boucle fermée

peut se mettre sous la forme :
$$F(p) = \frac{K_{BF}}{(1+Tp)^2}$$

Déduire l'expression de T en fonction de τ_m .

5.4. La courbe de la Figure 2 représente la réponse du moteur à un échelon d'amplitude 2V.

En déduire le temps de réponse à 5%, noté $T_{R_{5\%}}$.

5.5. On donne sur la Figure 3 la réponse en fréquence de la fonction de transfert en boucle ouverte du système étudié depuis la question 5. En déduire la marge de phase $M\phi$.

5.6. Conclure vis-à-vis des exigences du cahier des charges.

On souhaite diviser par dix le temps de réponse du système afin de satisfaire les exigences du cahier des charges. On introduit une boucle de retour supplémentaire dite boucle de vitesse ou retour tachymétrique comme l'illustre la Figure 4.

6. Etude de la correction

6.1. Déterminer la nouvelle fonction de transfert $M'(p)$ du moteur et montrer qu'elle peut

s'écrire sous la forme suivante :
$$M'(p) = \frac{K'_m}{p(1+\tau'_m p)}$$

6.2. Donner les expressions littérales de K'_m et τ'_m en fonction de K , K_m et τ_m .

6.3. Déterminer l'expression du gain du retour tachymétrique K' de telle sorte que $\tau'_m = \frac{\tau_m}{10}$

6.4. Déduire les valeurs numériques de K'_m et τ'_m .

6.5. En déduire sans calcul l'écart statique de position $\varepsilon_s(\infty)$ du système équivalent.

6.6. Déterminer la valeur du gain k_c permettant d'avoir une marge de phase de 45° .

7. Conclure vis-à-vis des exigences du cahier des charges.

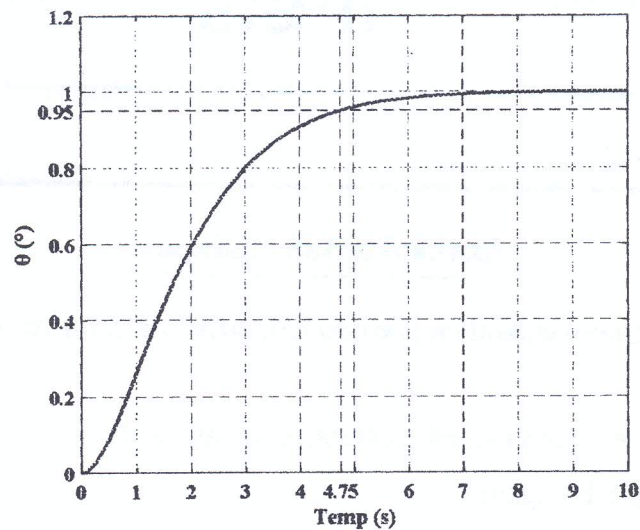


Figure 2 . Réponse à un échelon

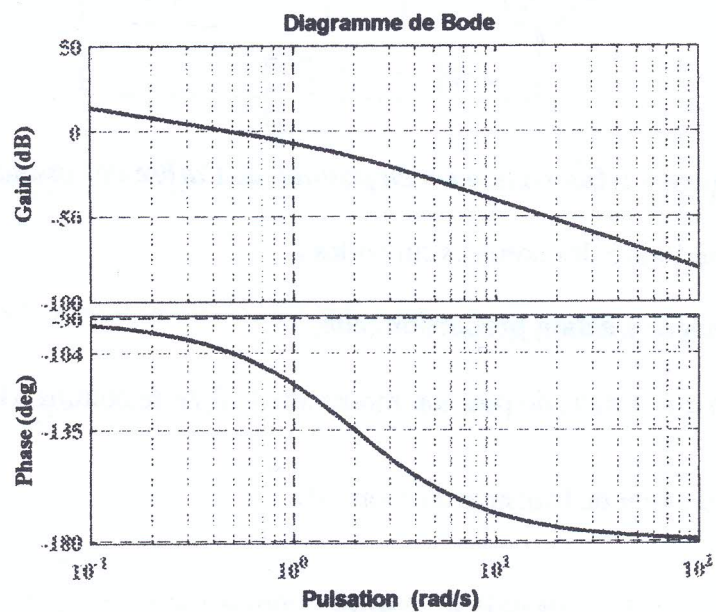


Figure 3 . Lieu de Bode en BO

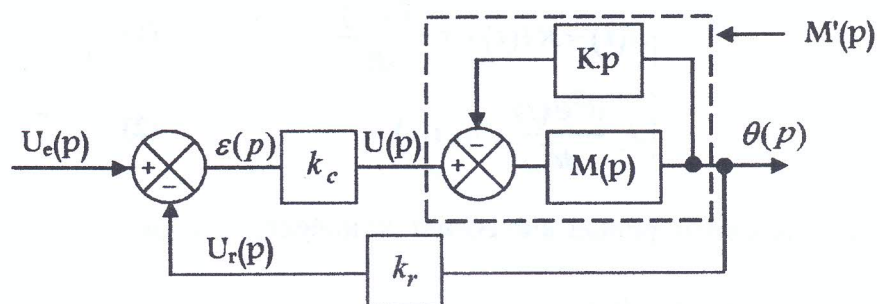


Figure 4 . Boucle de retour tachymétrique K_p