Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieurs de Sfax

Année Universitaire : 2020-2021

DEUXIEME EXAMEN

Section : MP2

Épreuve : MATHÉMATIQUES II

Durée : 3 heures

L'épreuve comporte quatre pages. Les calculatrices et documents sont interdits. Le sujet est composé d'un exercice et d'un problème tous indépendants.

Dans tout le sujet $\mathbb{k}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et ^TA la transposée d'une matrice $A \in M_{n,p}(\mathbb{k})$.

Exercice (7 points)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$. On note $\Phi_{A,B}$ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par :

$$\Phi_{A,B}(M) = AM - MB \quad , \quad \text{pour tout } M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

On note $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et $(E_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On rappelle que e_i (resp E_{ij}) est la colonne (resp la matrice carrée) dont tous les coefficients sont nuls à l'exception de celui de la i-ème ligne (resp de la i-ème ligne et de la j-ème colonne) qui vaut 1.

1. Montrer que $Sp_{\mathbb{C}}(^TB) = Sp_{\mathbb{C}}(B)$; où $Sp_{\mathbb{C}}(B)$ est l'ensemble des valeurs propres complexes de B.
2. Montrer que si B est diagonalisable, alors ^TB est diagonalisable.
3. Soit $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ (resp $W \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$) un vecteur propre de A (resp ^TB) associé à la valeur propre a (resp b). Montrer que la matrice $V\,^TW$ est un vecteur propre de $\Phi_{A,B}$; à quelle valeur propre est-il associé ?
4. Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. En écrivant $\chi_A(X) = \prod_{k=1}^{n}(X - a_k)$ où $a_1, ..., a_n$ sont les valeurs propres (non nécessairement distinctes) de A et χ_A est le polynôme caractéristique de A, montrer que

$$\text{la matrice } \chi_A(C) \text{ est inversible} \Leftrightarrow Sp_{\mathbb{C}}(A) \cap Sp_{\mathbb{C}}(C) = \emptyset$$

5. Soit $\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(\Phi_{A,B})$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé.
   (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k \times M = M \times (B + \lambda.I_n)^k$. En déduire que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(A) \times M = M \times P(B + \lambda.I_n)$.
   (b) Montrer que la matrice $\chi_A(B + \lambda.I_n)$ est non inversible.
   (c) En déduire, en utilisant les questions 1, 3 et 4, que

   $$Sp_{\mathbb{C}}(\Phi_{A,B}) = \{a - b \quad | \quad (a, b) \in Sp_{\mathbb{C}}(A) \times Sp_{\mathbb{C}}(B)\}$$

   puis exprimer la trace de $\Phi_{A,B}$ en fonction de celles de A et B.

(d) Donner une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour qu'il existe M non nulle dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AM = MB$.

6. Soient $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(Y_j)_{1\leq j\leq n}$ deux bases de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. On note P et Q les matrices de passage de la base canonique $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ à chacune de ces bases.

   (a) Calculer pour tout $(i,j) \in \{1,\cdots,n\}^2$, la matrice $e_i \times {}^T e_j$. En déduire que $PE_{ij}\ {}^TQ = X_i\ {}^TY_j$.

   (b) Montrer que $M \mapsto PM\ {}^TQ$ est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

   (c) Déduire que si A et B sont diagonalisables, alors il en est de même pour $\Phi_{A,B}$.

Problème (13 points)

Rappel et objectifs

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La matrice exponentielle de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ est $e^A = \exp(A) = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} \frac{A^p}{p!}$. On rappelle que :

- Si $A,B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ vérifiant $AB = BA$, alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$
- L'application $X \mapsto \exp(X)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ vers lui même est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{k})$.
- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ et $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{k})$, alors l'unique solution du problème de Cauchy $\begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$ est donnée par $X(t) = e^{tA}X_0$.

Dans la pémière partie, on étudiera certaines propriétés de l'exponentielle d'une matrice ; la seconde partie caractérise les matrices antisymétriques réelles ; dans la dernière partie on déterminera les composantes connexes par arcs de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Les parties II et III sont indépendantes

I. Préliminaires (4 points)

1. Montrer que pour tout $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{k}^n$, $\exp\begin{pmatrix} \alpha_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(\alpha_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \exp(\alpha_n) \end{pmatrix}$

2. Justifier que $\exp(A)$ est inversible et déterminer son inverse.

3. Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ une matrice inversible .

   (a) Justifier brièvement que les applications $X \mapsto {}^TX$ et $X \mapsto P^{-1}XP$ sont continues sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{k})$.

   (b) En déduire que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$
   $$\exp({}^TA) = {}^T(\exp(A)) \qquad \text{et} \qquad \exp(P^{-1}AP) = P^{-1}\exp(A)P$$

4. **Déterminant de l'exponentielle d'une matrice :**

   (a) Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire supérieure. Etablir que
   $$\det(e^X) = e^{Tr(X)}$$
   où $Tr(X)$ désigne la trace de X et $\det(X)$ le déterminant de X.

   (b) Plus généralement, montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$, on a:
   $$\det(e^A) = e^{Tr(A)}$$

5. **Différentielle de l'application exponentielle en** 0 :

   (a) On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme N définie par

   $$N(A) = n \max_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}| \quad , \quad \text{pour tout } A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

   Montrer que pour tout $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$,

   $$N(AB) \leq N(A)\,N(B)$$

   (b) Montrer que l'application $g : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $g(A) = \exp(A)$ est différentiable en 0 et que $dg(0)\cdot H = H$, pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

II. Une caractérisation des matrices antisymétriques (4,5 points)

On se propose de démontrer dans cette parite qu'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique si, et seulement si, toute solution de l'équation différentielle $X' = A \times X$ a une norme constante.

On considère une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$.

- On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel noté $\langle . \mid . \rangle$ et de la norme euclidienne $\|.\|$ associée

  $$\langle X \mid Y \rangle = {}^TXY \quad \text{et} \quad \|X\|^2 = {}^TXX, \ \text{pour tout } (X,Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$$

  où ${}^TX$ désigne la transposée de X.

- A une fonction $Y : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on lui associe la fonction $\Phi_Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

  $$\Phi_Y(t) = \|Y(t)\|^2, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}$$

- On note Σ_A l'ensemble des fonctions $Y : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant

  $$Y'(t) = A \times Y(t), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}$$

1. Montrer que pour tout $Y \in \Sigma_A$, Φ_Y est dérivable puis vérifier que

   $$\Phi_Y'(t) = {}^T[Y(t)] \times \left({}^TA + A\right) \times Y(t), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}$$

2. Montrer que si A est antisymétrique, alors pour tout $Y \in \Sigma_A$ la fonction Φ_Y est constante.

3. Justifier que la matrice ${}^TA + A$ est diagonalisable.

4. Dans cette question, on suppose que pour tout $Y \in \Sigma_A$ la fonction Φ_Y est constante.

   (a) Soit $Z_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. En utilisant la fonction $Z : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ définie par

   $$Z(t) = e^{tA} \times Z_0, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}$$

   montrer que ${}^TZ_0 \times \left({}^TA + A\right) \times Z_0 = 0$.

   (b) Montrer que 0 est la seule valeur propre de ${}^TA + A$. En déduire que A est antisymétrique.

5. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique.

   (a) Montrer que pour tout $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\langle BV \mid V \rangle = 0$.

   (b) Montrer que si une fonction $X : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est deux fois dérivable et vérifiant

   $$X''(t) = B \times X(t), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}$$

   alors la fonction Φ_X est convexe.

III. Les composantes connexes par arcs de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ (4,5 points)

On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ de déterminant positif et $\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ de déterminant négatif.

1. Quel est l'image de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ par l'application déterminant? L'ensemble $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est-il connexe par arcs ?
2. Soit v un réel et $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Démontrer que $\exp(vJ) = \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v \\ \sin v & \cos v \end{pmatrix}$.
3. Montrer que si $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, alors $\exp(A) \in \mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$. (Ind : on pourra utiliser les questions I.3.b et I.4.b)
4. Enoncer le théorème de réduction d'une matrice orthogonale (c'est-à-dire l'interprétation matricielle du théorème de réduction d'une isométrie).
5. Soit $\Omega \in \mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$.
   (a) Démontrer qu'il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, il existe deux entiers naturels r et s, il existe s réels $\theta_1,\ldots,\theta_s$ tels que ${}^tP\ \Omega\ P$ est de la forme :
   $$\begin{pmatrix} I_r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R(\theta_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & R(\theta_s) \end{pmatrix}$$
   où, pour θ dans $\mathbb{R}$, $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.
   (b) Construire une matrice $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\exp(A) = \Omega$.
6. Conclure que $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.
7. On fixe $U \in \mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a
   $$M \in \mathcal{O}_n^+(\mathbb{R}) \text{ si, et seulement si, } MU \in \mathcal{O}_n^-(\mathbb{R}).$$
   (b) En déduire que $\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

Fin de l'énoncé