UNIVERSITÉ DE SFAX — Année universitaire : 2020/2021

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieurs de Sfax

Devoir d'Algèbre - Semestre N°2
Sections : M.P.2

Durée : 2h — Date : 03 Avril 2021 — Nbre de pages : 3

Exercice 1

Soit n un entier ≥ 1.

On désigne par $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $\|\ \|$ sa norme euclidienne et $\mathcal{B}_1 = (e_1, ..., e_n)$ une base orthonormée de E.

$\mathcal{S}(E)$ désigne l'espace des endomorphismes symétriques de E.

Pour $f \in \mathcal{S}(E)$, on dit que

– f est symétrique positif si $\langle f(x), x\rangle \geq 0$, $\forall x \in E$.

– f est symétrique défini positif si $\langle f(x), x\rangle > 0$, $\forall x \in E \setminus \{0_E\}$.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et A sa matrice selon la base orthonormée $\mathcal{B}_1$.
   (a) On désigne par g l'endomorphisme de E de matrice ${}^tA$ selon la base $\mathcal{B}_1$.
   Montrer que $\langle f(x), y\rangle = \langle x, g(y)\rangle$, $\forall (x, y) \in E^2$
   (b) Montrer qu'il existe un unique endomorphisme $f^* \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant
   $$\forall (x, y) \in E^2,\ \langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle.$$
   f^* s'appelle l'adjoint de f
2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
   (a) Montrer que $mat(f^*, \mathcal{B}_1) = {}^tmat(f, \mathcal{B}_1)$.
   (b) Déduire que $(f^*)^* = f$.
3. Préciser f^* dans les deux cas suivants :
   (a) $f \in \mathcal{S}(E)$.
   (b) $f = \widetilde{0}$.
4. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
   Montrer que $f^* = -f \iff \langle f(x), x\rangle = 0$, $\forall x \in E$.
5. Soit $(f, g) \in (\mathcal{L}(E))^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que $(\alpha f + g)^* = \alpha f^* + g^*$.

(b) Montrer que $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.

(c) Déduire que $f \in GL(E) \iff f^* \in GL(E)$ et que lorsque $f \in GL(E)$, $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$.

6. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

   (a) Montrer que, $\forall k \in \mathbb{N}$, $(f^k)^* = (f^*)^k$.

   (b) Montrer que, $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $(P(f))^* = P(f^*)$.

   (c) Déduire que $\pi_{f^*} = \pi_f$.

7. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

   Montrer que $f^* \circ f$ et $f \circ f^*$ sont des endomorphismes symétriques positifs.

Exercice 2

- $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni de son produit scalaire canonique $\langle\ ,\ \rangle$ et sa norme euclidienne $\|\ \|$.
- Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On dit que
  - A est une matrice symétrique positive si : ${}^tXAX \geq 0$, $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
  - A est une matrice symétrique définie positive si : ${}^tXAX > 0$, $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$.
- On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

  et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soient $(M, N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$. Montrer que :

$$M = N \iff {}^tXMY = {}^tXNY;\ \forall X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

2. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

   (a) $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff sp_{\mathbb{R}}(A) \subset \mathbb{R}_+$

   (b) $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \iff sp_{\mathbb{R}}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$

3. Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que

   (a) Montrer qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tMM$.

   (b) Montrer qu'il existe $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = S^2$.

4. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

   (a) Montrer que ${}^tAA \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

   (b) Déduire qu'il existe $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que ${}^tAA = S^2$.

   (c) Montrer qu'il existe $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = OS$.

5. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

   On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (X, Y) & \longmapsto & {}^tXAY \end{array}$$

(a) Montrer que φ est un produit scalaire de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On désigne par $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B}'$ la base orthonormée de $(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \varphi)$ obtenue à partir de la base $\mathcal{B}$ par le procédé de schmidt. On note $P = Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

(b) Montrer que P est triangulaire supérieure de termes diagonaux strictement positifs.

(c) Justifier que $P^{-1} \in \mathbb{R}[P]$, puis déduire que P^{-1} est triangulaire supérieure.

(d) Montrer qu'il existe T triangulaire supérieure telle que $A = {}^tTT$.