

## Examen d'Analyse

## MP 2

Date : 04/01/2022

Durée : 3 heures

Nombre de pages : 4

**Problème 1**Pour  $p \in \mathbb{N}^*$ , on note :

- $M_p(\mathbb{R})$  : l'ensemble des matrices d'ordre  $p$  à coefficients dans  $\mathbb{R}$ .
- $D_p(\mathbb{R})$  : l'ensemble des matrices à coefficients dans  $\mathbb{R}$  et diagonalisables dans  $M_p(\mathbb{R})$ .
- $T_p(\mathbb{R})$  : l'ensemble des matrices à coefficients dans  $\mathbb{R}$  et trigonalisables dans  $M_p(\mathbb{R})$ .
- $SP_{\mathbb{R}}(A)$  : le spectre réel d'une matrice  $A \in M_p(\mathbb{R})$ .
- $D(0, R)$  : le disque ouvert de  $\mathbb{C}$  de centre 0 et de rayon  $R$ .

**Partie I**

- Soit  $P = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \dots + a_1X + a_0 \in \mathbb{R}_p[X]$  un polynôme unitaire de degré  $p$ .
  - Soit  $\lambda$  une racine de  $P$  dans  $\mathbb{C}$  tel que  $|\lambda| \geq 1$  et  $M = \max_{0 \leq i \leq p-1} |a_i|$ .  
Montrer que :  $|\lambda| \leq pM$ .
  - Prouver alors que  $\{\lambda \in \mathbb{C}; P(\lambda) = 0\} \subset D(0, R)$  avec  $R = \max(1, pM)$ .
- On se propose dans cette question de montrer que l'ensemble

$$U_p = \{P \in \mathbb{R}_p[X]; P \text{ de degré } p, \text{ unitaire et scindé dans } \mathbb{R}\}$$

est un fermé de  $\mathbb{R}_p[X]$ .Soit  $P_n = X^p + a_{p-1}^{(n)}X^{p-1} + \dots + a_1^{(n)}X + a_0^{(n)}$  une suite de  $U_p$  qui converge vers  $P = \sum_{i=0}^p a_i X^i$ .

- Justifier que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_i^{(n)} = a_i$  pour tout  $i \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$  et que  $P$  est unitaire.
- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $Z_n = \{z_1^{(n)}, z_2^{(n)}, \dots, z_p^{(n)}\}$  les zéros du polynôme  $P_n$  tels que :  $z_1^{(n)} \leq z_2^{(n)} \leq \dots \leq z_p^{(n)}$ .
  - Montrer qu'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall n \geq n_0, \forall i \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket, |a_i^{(n)}| \leq 1 + |a_i|.$$

- Déduire que

$$\forall n \geq n_0, \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, |z_i^{(n)}| \leq pM$$

$$\text{où } M' = \max_{0 \leq i \leq p} \{1 + |a_i|\}.$$

iii. Montrer alors que  $\{Z_n\}_n$  admet une suite extraite  $\{Z_{\phi(n)}\}$  convergente vers une limite  $Z = (z_1, z_2, \dots, z_p) \in \mathbb{R}^p$ .

(c) En écrivant  $P_n = \prod_{i=1}^p (X - z_i^{(n)})$ , montrer que  $P = \prod_{i=1}^p (X - z_i)$ .

(d) Conclure.

## Partie II

Pour  $A \in M_p(\mathbb{R})$ , on note  $\chi_A(X) = \det(XI_p - A)$  le polynôme caractéristique de  $A$  et on définit l'application

$$\begin{aligned} \chi : M_p(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R}_p[X] \\ A &\mapsto \chi_A(X) = X^p + b_{p-1}(A)X^{p-1} + \dots + b_1(A)X + b_0(A). \end{aligned}$$

• On admet que pour tout  $P \in U_p$ , il existe  $A \in T_p(\mathbb{R})$  tel que  $\chi(A) = P$ .

1. (a) Expliquer pourquoi les applications  $b_i : M_p(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}; A \mapsto b_i(A)$  sont continues sur  $M_p(\mathbb{R})$  pour tout  $i \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ .

(b) Dédire que  $\chi$  est continue sur  $M_p(\mathbb{R})$ .

2. (a) Montrer alors que  $T_p(\mathbb{R})$  est un fermé de  $M_p(\mathbb{R})$ .

3. Soit  $A \in T_p(\mathbb{R})$  et  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_p$  les valeurs propres de  $A$ .

On considère les suites  $\left( \beta_i^{(n)} = \lambda_i + \frac{i}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$

pour  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ .

(a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, \quad i \neq j \implies \beta_i^{(n)} \neq \beta_j^{(n)}.$$

(b) Calculer les limites de  $(\beta_i^{(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$  pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$  et déduire que  $T_p(\mathbb{R}) \subset \overline{D_p(\mathbb{R})}$ .

(c) Conclure que  $\overline{D_p(\mathbb{R})} = T_p(\mathbb{R})$ .

4.  $D_p(\mathbb{R})$  est-il un fermé de  $M_p(\mathbb{R})$ ? Justifier.

## Problème 2

On admet que la suite de terme général  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  est convergente, on note  $\gamma$  sa limite.

1. Soient  $a \geq 0$  et  $f : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue ayant une limite finie en  $+\infty$ .

Montrer que  $f$  est bornée.

2. Soit  $x > 0$ .

(a) Vérifier que l'intégrale  $\int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{e^{-t} - e^{-tx}}{t} dt$  converge.

(b) Montrer que

$$\forall a > 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^{\varepsilon a} \frac{e^{-t} - 1}{t} dt = 0.$$

(c) En déduire que

$$\forall x > 0, \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-tx}}{t} dt = \ln(x).$$

Dans la suite on pose, lorsque ceci a un sens,

$$\Psi(x) = \int_0^{+\infty} \left( \frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-tx}}{1 - e^{-t}} \right) dt.$$

3. (a) Montrer que  $\Psi$  est définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

(b) Vérifier que

$$\forall x > 0, \Psi(x+1) - \Psi(x) = \frac{1}{x}.$$

4. Soit  $g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et bornée.

On pose  $M = \sup_{x \in \mathbb{R}_+^*} |g(x)|$  et on considère la fonction  $\Theta$  définie par

$$\Theta(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} g(t) dt, \quad x > 0.$$

(a) Montrer que  $\Theta$  est bien définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

(b) Soit  $y > 0$ .

Montrer que la fonction  $t \mapsto t^n e^{-yt}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et que l'on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{+\infty} t^n e^{-yt} dt = \frac{n!}{y^{n+1}}.$$

(c) Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, |e^t - 1 - t| \leq \frac{t^2}{2} e^{|t|}.$$

(d) En déduire que pour tout  $x > 0$  et tout  $h \in \mathbb{R}$  tel que  $|h| \in ]0, x[$  on a

$$\left| \frac{\Theta(x+h) - \Theta(x)}{h} + \int_0^{+\infty} t e^{-xt} g(t) dt \right| \leq \frac{M|h|}{(x-|h|)^3}.$$

(e) Montrer que  $\Theta$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et expliciter  $\Theta'$ .

5. (a) Montrer que

$$\forall x > 0, \Psi(x) - \ln(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-t-e^{-t}}{t(1-e^{-t})} e^{-xt} dt.$$

(b) Déduire que  $\Psi$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et que

$$\forall x > 0, \Psi'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{1-e^{-t}} dt.$$

(c) Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\Psi(x) - \ln(x)] = 0.$$

6. (a) Montrer que

$$\forall x > 0, \forall k \in \mathbb{N}, \int_0^{+\infty} t e^{-(x+k)t} dt = \frac{1}{(x+k)^2}.$$

(b) Montrer que pour tout  $x > 0$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\Psi'(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(x+k)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} e^{-(x+n)t} dt.$$

(c) En déduire que

$$\forall x > 0, \quad \Psi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^2}.$$

7. (a) Montrer que la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

$$\text{On pose } S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right), \quad x > 0.$$

(b) Montrer que  $S$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

(c) Montrer que pour tout  $x > 0$  et tout  $h \in \mathbb{R}$  tel que  $|h| \in ]0, \frac{x}{2}[$  on a

$$\left| \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^2} \right| \leq |h| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

(d) Déduire que  $S$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et expliciter  $S'$ .

(e) Montrer que la fonction  $\Phi : x \mapsto S(x) - \Psi(x) - \frac{1}{x}$  est constante sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

8. (a) Montrer que

$$\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Psi(x) = \Psi(x+n) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x+k}.$$

(b) Montrer que

$$\forall x > 0, \quad \Psi(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \ln(x+n) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x+k} \right].$$

(c) Déduire que

$$\forall x > 0, \quad \Psi(x) = S(x) - \frac{1}{x} - \gamma.$$