

Devoir de Contrôle d'Algèbre N°2
 Filière : MP 2

Durée : 2h

Date : Février 2023

Nbre de pages : 4

*Formes symplectiques linéaires***Notations**

- Dans tout le problème, n et m désignent des entiers naturels non nuls.
- On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille $n \times n$ à coefficients réels et I_n la matrice identité dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Pour tous entiers naturels non nuls p et q , on note $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients réels. Ainsi, $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices colonnes à n lignes et $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- On note $GL_n(\mathbb{R})$ le groupe linéaire réel d'ordre n (matrices carrées inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) et $SL_n(\mathbb{R})$ le sous-groupe des matrices de déterminant égal à 1 :

$$SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$$

- On note tA la transposée d'une matrice A .
- Le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^n et la norme euclidienne associée sont notés respectivement $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $\| \cdot \|$.
- Le groupe orthogonal réel d'ordre n est noté $O_n(\mathbb{R})$:

$$O_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = I_n\}$$

- Si E est un \mathbb{R} -espace vectoriel, on note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E et $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications linéaires de E dans \mathbb{R} .

I Préliminaires

Q 1. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\forall (X, Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2, \quad {}^tXAY = {}^tXBY$$

Montrer que $A = B$.

Q 2. Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer que les valeurs propres de tMM sont toutes strictement positives.

En déduire qu'il existe une matrice S symétrique à valeurs propres strictement positives telle que $S^2 = {}^tMM$.

II Objets symplectiques

II.A - Structure d'espace vectoriel symplectique réel

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie n .

On appelle *forme symplectique* sur E toute application ω de E^2 dans \mathbb{R} qui vérifie les trois propriétés suivantes :

- bilinéarité : $\forall (x, y, z) \in E^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \omega(x + \lambda y, z) = \omega(x, z) + \lambda \omega(y, z)$ et $\omega(x, y + \lambda z) = \omega(x, y) + \lambda \omega(x, z)$;
- antisymétrie : $\forall (x, y) \in E^2, \omega(x, y) = -\omega(y, x)$;
- non dégénérescence : $\{x \in E \mid \forall y \in E, \omega(x, y) = 0\} = \{0_E\}$.

Un *espace vectoriel symplectique réel* (E, ω) est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie E muni d'une forme symplectique ω sur E .

Q 3. Montrer que, si ω est une forme symplectique sur E , alors pour tout vecteur x de E , $\omega(x, x) = 0$.

Pour tout sous-espace vectoriel F d'un espace symplectique (E, ω) , on appelle ω -orthogonal de F et on note F^ω l'ensemble

$$F^\omega = \{x \in E \mid \forall y \in F, \omega(x, y) = 0\}$$

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace symplectique (E, ω) .

- Q 4.** Justifier que F^ω est un sous-espace vectoriel de E .
Q 5. Le sous-espace F^ω est-il nécessairement en somme directe avec F ?

II.B - Structure symplectique standard sur \mathbb{R}^n

On suppose qu'il existe une forme symplectique ω sur \mathbb{R}^n et on note $\Omega \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par

$$\Omega = (\omega(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n}$$

où (e_1, \dots, e_n) désigne la base canonique de \mathbb{R}^n .

Q 6. Montrer que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \omega(x, y) = {}^t X \Omega Y$$

où X et Y désignent les colonnes des coordonnées de x et y dans la base canonique de \mathbb{R}^n .

- Q 7.** En déduire que Ω est antisymétrique et inversible.
Q 8. Conclure que l'entier n est pair.

Jusqu'à la fin du problème, on suppose que n est pair et on note $m \in \mathbb{N}^*$ l'entier naturel tel que $n = 2m$.

On note $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) (= \mathcal{M}_{2m}(\mathbb{R}))$ la matrice définie par blocs par

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix}$$

et on note j l'endomorphisme de \mathbb{R}^n canoniquement associé à J .

Q 9. Calculer J^2 et déduire l'inverse de J .

Montrer que l'application $b_s : \begin{matrix} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \langle x, j(y) \rangle \end{matrix}$ est une forme symplectique sur \mathbb{R}^n .

Il existe donc des formes symplectiques en dimension paire, et seulement en dimension paire.

La forme symplectique b_s est appelée la *forme symplectique standard sur \mathbb{R}^n* .

II.C - Endomorphismes et matrices symplectiques réels

On appelle *endomorphisme symplectique* d'un espace vectoriel symplectique réel (E, ω) tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \omega(u(x), u(y)) = \omega(x, y).$$

On note $\text{Symp}_\omega(E)$ l'ensemble des endomorphismes symplectiques de l'espace symplectique (E, ω) .

Soit $u \in \text{Symp}_\omega(E)$ un endomorphisme symplectique de E .

Soient λ, μ des valeurs propres réelles de u , et soient $E_\lambda(u), E_\mu(u)$ les sous-espaces propres associés.

Q 10. Montrer que, si $\lambda\mu \neq 1$, alors les sous-espaces $E_\lambda(u)$ et $E_\mu(u)$ sont ω -orthogonaux, c'est-à-dire :

$$\forall x \in E_\lambda(u), \quad \forall y \in E_\mu(u), \quad \omega(x, y) = 0.$$

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ un endomorphisme de \mathbb{R}^n . On note M la matrice de u dans la base canonique de \mathbb{R}^n .

Q 11. Montrer que u est un endomorphisme symplectique de l'espace symplectique standard (\mathbb{R}^n, b_s) si et seulement si ${}^tMJM = J$.

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *symplectique* si ${}^tMJM = J$.

On note $\text{Sp}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symplectiques réelles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{2m}(\mathbb{R})$:

$$\text{Sp}_n(\mathbb{R}) = \text{Sp}_{2m}(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tMJM = J\}$$

Q 12. Montrer que $\text{Sp}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $(\text{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$, contenant la matrice J et stable par transposition : (c'est-à-dire si $M \in \text{Sp}_n(\mathbb{R})$, alors ${}^tM \in \text{Sp}_n(\mathbb{R})$).

Ce groupe est appelé *groupe symplectique réel d'ordre $n = 2m$* .

Soient A, B, C, D dans $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ et soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2m}(\mathbb{R})$ (décomposition par blocs).

Q 13. Montrer que $M \in \text{Sp}_{2m}(\mathbb{R})$ si et seulement si

$${}^tAC \text{ et } {}^tBD \text{ sont symétriques et } {}^tAD - {}^tCB = I_m.$$

III Déterminant d'une matrice symplectique réelle

L'objectif de cette partie est de montrer l'inclusion $\text{Sp}_n(\mathbb{R}) \subset \text{SL}_n(\mathbb{R})$ moyennant d'une méthode qui repose sur une propriété structurelle du groupe symplectique $\text{Sp}_n(\mathbb{R})$ qu'on examine au préalable.

III.A - Le cas de la dimension 2

Q 14. Montrer que $\text{Sp}_2(\mathbb{R}) = \text{SL}_2(\mathbb{R})$.

III.B - Commutant de J

On note $\mathcal{C}_J = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid JM = MJ\}$ le commutant de la matrice J , c'est-à-dire l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec J .

Q 15. Montrer que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) (= \mathcal{M}_{2m}(\mathbb{R}))$,

$$M \in \mathcal{C}_J \iff \exists (U, V) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_m(\mathbb{R}), \quad M = \begin{pmatrix} U & -V \\ V & U \end{pmatrix}$$

Q 16. En déduire que, pour toute matrice $M \in \mathcal{C}_J$, $\det(M) \geq 0$.

On pourra considérer le produit de matrices par blocs $\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ iI_m & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & -V \\ V & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -iI_m & I_m \end{pmatrix}$.

III.C - Décomposition polaire d'une matrice symplectique réelle

On note $\text{OSp}_n(\mathbb{R}) = \text{Sp}_n(\mathbb{R}) \cap \text{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symplectiques et orthogonales réelles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de sa topologie d'espace vectoriel normé de dimension finie.

Q 17. Montrer que $\text{OSp}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact du groupe symplectique $\text{Sp}_n(\mathbb{R})$.

Q 18. Montrer que $\text{OSp}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_J$.

Q 19. En déduire que, pour toute matrice M de $\text{OSp}_n(\mathbb{R})$, $\det(M) = 1$.

Jusqu'à la fin de la sous-partie III.C, on considère une matrice $M \in \text{Sp}_n(\mathbb{R})$.

Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique à valeurs propres strictement positives telle que $S^2 = {}^tMM$.

Q 20. Montrer que S est symplectique.

On pourra considérer une base de vecteurs propres de l'endomorphisme s de \mathbb{R}^n canoniquement associé à S , et montrer que s est un endomorphisme symplectique de l'espace standard (\mathbb{R}^n, b_s) .

Q 21. Justifier que S est inversible puis montrer que la matrice O définie par $O = MS^{-1}$ appartient au groupe $\text{OSp}_n(\mathbb{R})$.

Q 22. Conclure que le déterminant de la matrice M est égal à 1.