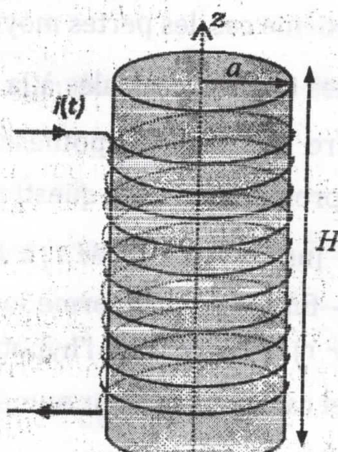
Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieur de Sfax	IPEIS	30 Octobre 2019 2ème année PC AU : 2019 / 2020
	Devoir de contrôle de Physique N° 01 **(Durée : 2 H)**	

PROBLEME N° 01

Les fours à induction à creuset sont constitués essentiellement d'une bobine inductrice entourant un creuset dans lequel se trouve la masse métallique à fondre (figure).

La bobine cylindrique est formé de N spires circulaires régulièrement espacées, de rayon a, réparties sur une couche de hauteur H. Elle est parcourue par un courant électrique sinusoïdal d'intensité $i(t)=I_0\cos(\omega t)$, de fréquence $f=\frac{\omega}{2\pi}=1\,kHz$.



La longueur H de la bobine est suffisamment grande devant son rayon a pour être considérée comme infinie. Le creuset est assimilé à un cylindre transparent au champ électromagnétique. On dispose dans le creuset un barreau cylindrique métallique non magnétique d'axe Oz.

Afin de simplifier, on suppose que la bobine est complètement remplie par le barreau cylindrique conducteur (même rayon a et même hauteur $H>>a$). Ce conducteur ohmique a les mêmes constantes ε_0 (permittivité) et μ_0 (perméabilité) que le vide. Sa conductivité γ, supposée constante et uniforme, a la même valeur en régime sinusoïdal qu'en régime stationnaire.
L'axe du barreau métallique est confondu avec celui de la bobine.

1- Montrer que, pour la fréquence $f=1\,kHz$, l'équation de Maxwell-Ampère peut être simplifiée. Donner le nom de l'approximation ainsi faite. On donne la conductivité électrique du cuivre $\gamma=6{,}1\,10^7\,S\,m^{-1}$.

2- On se place dans le cadre de cette approximation et on néglige dans un premier temps, le champ magnétique créé par les courants induits dans le cylindre conducteur.

2-1- En utilisant le théorème d'Ampère, montrer que le champ magnétique uniforme $\vec{B}_a$ est donné par $\vec{B}_a(t)=B_0\cos(\omega t)\vec{u}_z$. Donner l'expression de B_0.

2-2- Montrer que le champ électrique induit $\vec{E}_i(M,t)$ à l'intérieur du solénoïde s'écrit sous la forme $\vec{E}_i(M,t)=\frac{1}{2}\omega r B_0 \sin(\omega t)\vec{u}_\theta$.

2-3- On constate que le barreau conducteur est parcouru par un courant volumique (dit *courant de Foucault*) de densité volumique $\vec{J}$. Expliquer clairement l'origine de ce courant. Quelle est la conséquence de l'existence de ce courant pour le barreau conducteur ?

2-4- Donner l'expression de la densité volumique des courants induits $\vec{J}$ en tout point du conducteur. Quelle est son unité ?

2-5- Écrire l'expression de la puissance volumique dissipée par effet Joule en tout point du matériau conducteur par les courants induits. Établir l'expression de sa valeur moyenne temporelle $\langle p_J \rangle$. Commenter l'inhomogénéité de la puissance $\langle p_J \rangle$.

2-6- En déduire la puissance moyenne totale $\langle \mathcal{P}_J \rangle$ dissipée par effet Joule dans le conducteur. Commenter l'influence de la conductivité du conducteur, de son caractère massif et de la fréquence du courant $i(t)$.

Montrer que le modèle explique pourquoi dans le chauffage par induction, on choisit une fréquence de 1 kHz plutôt que 50 Hz directement accessible.

2-7- Expliquer l'intérêt pratique du dispositif étudié.

2-8- Montrer qu'on peut diminuer la puissance moyenne totale $\langle \mathcal{P}_J \rangle$ en divisant le conducteur en feuilles cylindriques ou en fibres de rayon $b = \frac{a}{n}$ séparées par un isolant. Montrer que dans le deuxième cas, les pertes moyennes par unité de volume sont divisées par n^2 ?

3- Les courants calculés à la question **2-4-/** créent à leur tour un champ magnétique $\vec{B}_i(M,t)$. On désire vérifier l'hypothèse $\left|\vec{B}_i(M,t)\right| << \left|\vec{B}_a(t)\right|$. On se place toujours dans le cadre de l'approximation de la question **1-/**.

3-1- Justifier que $\vec{B}_i(M,t) = B_i(r,t)\vec{u}_z$.

3-2- En utilisant la forme locale de l'équation de Maxwell-Ampère, calculer le champ magnétique $\vec{B}_i(r,t)$. Montrer que l'hypothèse $\left|\vec{B}_i(M,t)\right| << \left|\vec{B}_a(t)\right|$ est vérifiée si $a << a_\ell$. Donner l'expression de a_ℓ et calculer sa valeur numérique dans le cas du cuivre. Commenter le résultat obtenu.

3-3- Dans un four à induction habituel, le rayon a du cylindre est de l'ordre de 10 cm. L'hypothèse $\left|\vec{B}_i(M,t)\right| << \left|\vec{B}_a(t)\right|$ est-elle vérifiée ?

3-4- On suppose que l'hypothèse $\left|\vec{B}_i(M,t)\right| << \left|\vec{B}_a(t)\right|$ n'est pas valable et on étudie le champ magnétique total dans le barreau conducteur. On note $\vec{B}(M,t) = B(r,t)\vec{u}_z$ le champ magnétique total. Montrer que le champ magnétique $B(r,t)$ vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial B(r,t)}{\partial r} + \frac{\partial^2 B(r,t)}{\partial r^2} = \mu_0 \gamma \frac{\partial B(r,t)}{\partial t}$$

À quel type de solution faut-il s'attendre dans le cas d'une dépendance temporelle harmonique ?

3-5- Que se passe-t-il si l'on travaille à fréquence élevée ?

PROBLEME N° 02

Dans un repère orthonormé direct $(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$, on considère deux ondes électromagnétiques P.P.H., de même pulsation ω et polarisées rectilignement suivant (Ox). Ces ondes (O_1) et (O_2) se propagent suivant deux directions du plan (O,y,z) faisant avec l'axe (Oy) les angles α et $-\alpha$ respectivement. En notation complexe, les expressions des champs électriques associées à ces ondes en tout point $M(x,y,z)$, sont respectivement de la forme : $\underline{\vec{E}}_1(M,t) = E_0 \exp j(\omega t - \vec{k}_1\vec{r})\vec{u}_x$ et $\underline{\vec{E}}_2(M,t) = E_0 \exp j(\omega t - \vec{k}_2\vec{r})\vec{u}_x$, où l'amplitude E_0 est une constante réelle positive.

1-1- Quel est le lieu où, à un instant donné, la phase de l'onde (O_1) (ou (O_2)) est constante. On caractérisera ce lieu par rapport au vecteur d'onde $\vec{k}_1$ (ou $\vec{k}_2$).

1-2- Montrer que ces deux ondes sont en phase à l'origine O du repère d'étude. Représenter les plans d'ondes respectivement de (O_1) et (O_2) passant par le point O.

1-3- Les champs électriques associés à ces ondes obéissent à une équation aux dérivées partielles. Rappeler et nommer cette équation. En déduire que les vecteurs d'onde $\vec{k}_1$ et $\vec{k}_2$ sont de même module.

2- Ecrire, dans la base du repère, les composantes des vecteurs d'ondes $\vec{k}_1$ et $\vec{k}_2$. En déduire, en notation complexe, les expressions des vecteurs champs magnétiques $\underline{\vec{B}}_1(M,t)$ et $\underline{\vec{B}}_2(M,t)$ en fonction de E_0, ω, c et α.

3- Les champs relatifs aux ondes (O_1) et (O_2) se superposent en tout point de l'espace.

3-1- Déterminer, en notation complexe, l'expression du champ électrique résultant $\underline{\vec{E}}(M,t)$. Mettre sous la forme $\underline{\vec{E}}(M,t) = E_{0R}\, exp\, j(\omega t - \beta y)\vec{u}_x$, où β est une constante réelle et E_{0R} est l'amplitude du champ électrique résultant.

3-2- Vérifier que E_{0R} est une fonction périodique de la variable z dont on calculera sa période p en fonction de la longueur d'onde λ et α.

3-3- Préciser la direction de propagation de l'onde résultante ainsi que sa vitesse.

4-1- Calculer, en notation complexe, les composantes du champ magnétique résultant $\underline{\vec{B}}(M,t)$. En déduire que ce champ est la somme de deux champs magnétiques : transversal $\underline{\vec{B}}_t(M,t)$ et longitudinal $\underline{\vec{B}}_\ell(M,t)$.

4-2- Comparer la structure de l'onde électromagnétique étudiée $(\vec{E},\vec{B})$ à celle d'une O.E.M.P.P.H.

4-3- Donner les expressions réelles de $\vec{E}(M,t), \vec{B}_t(M,t)$, $\vec{B}_\ell(M,t)$ pour $\alpha = 0$ et $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

5-1- Calculer le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}(M,t)$ associé à l'onde $(\vec{E},\vec{B})$ ainsi que sa valeur moyenne temporelle $\langle \vec{\Pi} \rangle$. Déterminer sa période spatiale p'.

5-2- En déduire la puissance moyenne qui traverse une section S carré, de côté a grand devant la période p'. On donne : $\frac{1}{a}\int_{z=0}^{a}\left(1+cos\left(\frac{2\pi z}{p'}\right)\right)dz \approx 1$ si $p' << a$.

5-3- Calculer la valeur moyenne, temporelle et spatiale (suivant z), de la densité volumique d'énergie électromagnétique notée $\langle u_{em} \rangle$.

5-4- En calculant l'énergie électromagnétique moyenne qui traverse la section S pendant la durée dt, déduire la vitesse de propagation v_e de l'énergie.