Correction de devoir de synthèse de physique n°1

* Problème n°1 :

A/

1/ Un écoulement parfait est un écoulement où tous les phénomènes diffusifs (viscosité, diffusion thermique) sont négligés : l'écoulement est alors adiabatique et réversible càd isentropique (Conséquences)

2/ On a l'équation d'Euler :

$$\rho(M,t)\left(\frac{\partial \vec{v}(M,t)}{\partial t} + \left(\vec{v}(M,t)\,\overrightarrow{grad}\right).\vec{v}(M,t)\right) = -\overrightarrow{grad}\, p(M,t)$$

or $(\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v}$ est un terme d'ordre 2 donc négligeable

$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ est d'ordre 1

donc $(\rho_0 + \underbrace{\rho_1(M,t)}_{\ll})\,\frac{\partial \vec{v}(M,t)}{\partial t} = -\overrightarrow{grad}\,(p_0 + p_1(M,t))$

$$\boxed{\rho_0 . \frac{\partial \vec{v}(M,t)}{\partial t} = -\overrightarrow{grad}\, p_1(M,t)}$$ Eqt° d'Euler linéarisée (I)

3/ $\frac{\partial \rho(M,t)}{\partial t} + div\left(\rho(M,t)\vec{v}(M,t)\right) = 0$; il s'agit de l'équation de continuité ou de conservation locale de la masse.

Elle traduit le caractère conservatif de la masse.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left((\rho_0 + \rho_1(M,t)\right) + div\left((\rho_0+\rho_1(M,t))\,\vec{v}(M,t)\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_1(M,t) + div\left(\rho_0 . \vec{v}(M,t)\right) = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\rho_1(M,t) + \rho_0\, div\, \vec{v}(M,t) = 0}$$ eqt° linéarisée (II)

4/ on a $\chi_s = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_s$

$$\chi_s \simeq \frac{1}{\underbrace{\rho_o + \rho_1}_{\simeq}}\left(\frac{\Delta \rho}{\Delta P}\right)_s \simeq \frac{1}{\rho_o}\left(\frac{\rho - \rho_o}{P - P_o}\right) = \frac{1}{\rho_o}\,\frac{\rho_1}{P_1}$$

d'où $\boxed{\rho_1 = \chi_s \cdot \rho_o \cdot P_1}$ Eqt° linéarisée III

5/ On calcule la divergence de I

$$\mathrm{div}\left[\rho_o \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, P_1\right]$$

$$\rho_o \frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{div}\,\vec{v}) = -\,\mathrm{div}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, P_1$$

$$\boxed{\rho_o \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{div}\,\vec{v})}_{?} = -\Delta P_1} \quad (*)$$

or d'après II on a $-\mathrm{div}\,\vec{v} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho_1}{\rho_o}\right)$

or d'après III $\frac{\rho_1}{\rho_o} = P_1 \chi_s$

d'où $-\mathrm{div}\,\vec{v} = \frac{\partial}{\partial t}(P\chi_s) = \boxed{\chi_s \frac{\partial P_1}{\partial t} = -\mathrm{div}\,\vec{v}}$

$\frac{\partial}{\partial t}$ (a) $\Rightarrow$ $\boxed{-\chi_s \frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{div}\,\vec{v})}$ (a)

(a) dans $(*)$ $\Rightarrow$ $\rho_o\left(-\chi_s \frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2}\right) = -\Delta P_1$

$\Rightarrow$ $\boxed{\Delta P_1 = \rho_o \chi_s \frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2}}$ Equation de propagation relative à la surpression acoustique $P_1(M,t)$

Il s'agit d'une équation de d'Alembert de célérité $\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_s}}}$

. dans l'eau $C_{eau} = \frac{1}{\sqrt{10^3 \times 4{,}3\,10^{-10}}}$

$$\boxed{C_{eau} = 1{,}5\ km.s^{-1}}$$

- La célérité dans <u>l'air</u> est de l'ordre de $340\ m s^{-1}$ et dans les <u>solides</u> de l'ordre de plusieurs milliers de $m s^{-1}$.

Les variations de χ_s et ρ expliquent ces différences : l'air est moins dense que l'eau mais beaucoup plus compressible : la célérité est plus faible. Pour les solides, la densité est un peu plus grande que celle de l'eau mais la compressibilité est plus faible : la célérité est plus faible que celle dans les sds.

$\Rightarrow$ donc $\underbrace{C_{air} < C_{eau} < C_{sd}}_{\text{d'après la pratique}}$ (on raisonne uniquement sur ρ_0 théoriquement)

car $\rho_{air} < \rho_{eau} < \rho_{sd}$

B/

6/ on a $div(p_1 \vec{v}) = \underbrace{\vec{grad}\, p_1}_{\text{d'après (I)}} \cdot \vec{v} + p_1 \underbrace{div \vec{v}}_{\text{d'après (II)}}$

$$= -\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot \vec{v} + p_1 \left[-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} \right) \right] \quad \text{d'après (III)}$$

$$= -\rho_0 \cdot \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - p_1 \frac{\partial}{\partial t} (\chi_s \cdot p_1)$$

$$div(p_1 \vec{v}) = -\rho_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2} v^2\right) - \chi_s \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2} p_1^2\right)$$

$$div(p_1 \vec{v}) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \rho_0 v^2 + \frac{1}{2} \chi_s p_1^2 \right]$$

d'où $\boxed{\operatorname{div}(p_1 \vec{v}) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho_0 v^2 + \frac{1}{2}\chi_s p_1^2\right) = 0}$

Cette équation traduit une conservation locale de l'énergie.

7/ "e" est la densité volumique d'énergie acoustique

tq $\frac{1}{2}\rho_0 v^2$: l'énergie cinétique volumique de l'écoulement

$\frac{1}{2}\chi_s p_1^2$: l'énergie potentielle élastique associée à la compression/dilatation des particules de fluide.

$\vec{\Pi}$: vecteur densité de flux de puissance : son flux à travers une surface est la puissance acoustique traversant cette surface

donc $\vec{\Pi}$ est homogène à une puissance surfacique

e est homogène à une énergie volumique

C/

8/ $p_1(x,t) = f(x - ct)$: solution générale vers les $x \nearrow$

9/ on a d'après (I) $\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, p_1$

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -f'(x-ct)\,\vec{e_x}$$

$$\boxed{\vec{v} = \frac{1}{c\rho_0} f(x-ct)\,\vec{e_x}}$$ dans le cas général.

En effet dans notre cas on a $p_1(x,t) = P_m \cos(\omega t - kx)$

d'où $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{-1}{\rho_0}\left[-k\, P_m\left(-\sin(\omega t - kx)\right)\right]\vec{e_x}$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{k P_m}{\rho_0}\sin(\omega t - kx)\,\vec{e_x}$$

$$\vec{v} = +\frac{k P_m}{\rho_0 \omega}\cos(\omega t - kx)\,\vec{e_x} = \boxed{\frac{P_m \cos(\omega t - kx)}{\rho_0 c}\,\vec{e_x} = \vec{v}}$$ avec $\frac{k}{\omega} = \frac{1}{c}$

la direction de $\vec{v}$ est $\vec{e_x}$, et la propagation est aussi suivant x donc l'onde est longitudinale.

10/ Pour une onde plane progressive se propageant selon $\vec{e_x}$, on a

$$\vec{v} = \frac{P_1}{\rho_0 C}\vec{e_x}$$

, or $e = \frac{1}{2}\left(\rho_0 v^2 + \chi_s p_1^2\right) = \frac{1}{2}\left(\rho_0 \frac{P_1^2}{\rho_0^2 C^2} + \chi_s P_1^2\right)$

or $C^2 \cdot \rho_0 = \frac{1}{\chi_s}$

d'où $e = \frac{1}{2}\left(\chi_s P_1^2 + \chi_s P_1^2\right)$

$\boxed{e = \chi_s P_1^2}$ $\Rightarrow$ il y'a équipartition de l'energie entre les deux formes d'énergie.

$\vec{\Pi} = p_1 \vec{v} = P_1 \frac{P_1}{\rho_0 C} \vec{e_x} = \frac{P_1^2}{\frac{1}{C\chi_s}} \vec{e_x} = \chi_s C\, p_1^2 \vec{e_x} = \boxed{C \cdot e\vec{e_x} = \vec{\Pi}}$

$\Rightarrow$ $\vec{\Pi}$ se met sous la forme d'une densité volumique de courant d'énergie de densité e et de vitesse C. L'energie d'une OPP se propage à de vitesse C.

11/ on a $I = \|\langle \vec{\Pi}(x,t)\rangle\|$

or $\vec{\Pi}(x,t) = \chi_s C\, p_1^2 \vec{e_x} = \chi_s C\, P_m^2 \cos^2(\omega t - kx)\vec{e_x}$

$$\langle \vec{\Pi}(x,t)\rangle = \frac{1}{2}\chi_s C \cdot P_m^2 \vec{e_x}$$

$$\boxed{\|\langle \vec{\Pi}(x,t)\rangle\| = \frac{1}{2}\chi_s C P_m^2}$$

12/ $I = \frac{1}{2}\chi_s C P_m^2 \longrightarrow \boxed{P_m = \sqrt{\frac{2I}{C\chi_s}}}$

or $I_{dB} = 100\,dB$ $\quad \log\left(\frac{I}{I_R}\right) = \frac{I_{dB}}{10} \longrightarrow \frac{I}{I_R} = 10^{\frac{I_{dB}}{10}} = 10^{\frac{100}{10}} = 10^{10}$

d'où $\boxed{P_m = \sqrt{\dfrac{2.10^{10} I_R}{C X_s}}}$ or $P_{m\,réf} = 10^{-6}$ Pa

$P_{m\,réf}^2 = \dfrac{2 . I_R}{X_s C} \rightsquigarrow$ $\boxed{I_R = \dfrac{P_{m\,réf}^2 X_s C}{2}}$

$\underline{\vee}$ $P_m = \sqrt{\dfrac{\cancel{2} . 10^{10} P_{m\,réf}^2 \cancel{X_s} \cancel{C}}{\cancel{2} \cancel{C} \cancel{X_s}}}$

$P_m = \sqrt{10^{10} . P_{m\,réf}^2} = \boxed{10^5 P_{m\,réf} = P_m}$ AN $P_m = 10^5 \times 10^{-6} = \boxed{0{,}1 \text{ Pa} = P_m}$

or d'après (III) : $\boxed{\rho_m = X_s \rho_0 P_m}$

AN $\rho_m = 4{,}3 \, 10^{-10} \times 10^3 \times 0{,}1$

$\boxed{\rho_m = 4{,}3 \, 10^{-8} \text{ kg m}^{-3}}$

On vérifie bien que $p_m \ll P_0$ et $\rho_m \ll \rho_0$

$\Rightarrow$ approximation acoustique bien vérifiée

13/ d'après (I) : $\rho_0 \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, p_1(M, t)$

soit $\vec{v} = V_m \cos(\omega t - kx)\, \vec{e_x}$

$p_1 = P_m \cos(\omega t - kx)$

$\rho_0 V_m \omega \left(-\sin\cancel{(\omega t - kx)}\right) \cancel{\vec{e_x}} = -(-k) P_m \left(-\sin\cancel{(\omega t - kx)}\right) \cancel{\vec{e_x}}$

$\rho_0 V_m \omega = k P_m$

$V_m = \left(\dfrac{k}{\omega}\right) \dfrac{P_m}{\rho_0}$

$\boxed{V_m = \left(\dfrac{1}{C}\right) \dfrac{P_m}{\rho_0}}$ AN $V_m = \dfrac{1 \times 0{,}1}{1{,}5 \, 10^3 \times 10^3}$

$\boxed{V_m = 6{,}6 \, 10^{-8} \text{ m s}^{-1}}$ $\ll C = 1400 \text{ m s}^{-1}$ (hypothèse est très largement vérifiée)

D/

14/ on a $\rho(M,t)\left[\frac{\partial \vec{v}(M,t)}{\partial t}+\left(\vec{v}(M,t)\cdot\vec{grad}\right)\cdot\vec{v}(M,t)\right]=-\vec{grad}\,p(M,t)+\eta\,\Delta\vec{v}(M,t)$

$$\Big(\rho_0+\underbrace{\rho_1(M,t)}_{\ll}\Big)\left[\frac{\partial \vec{v}(M,t)}{\partial t}+\underbrace{\left(\vec{v}(M,t)\cdot\vec{grad}\right)\cdot\vec{v}(M,t)}_{\ll}\right]=-\vec{grad}\left(P_0+P_1(M,t)\right)+\eta\,\Delta\vec{v}(M,t)$$

$$\boxed{\rho_0\,\frac{\partial \vec{v}(M,t)}{\partial t}=-\vec{grad}\,p_1(M,t)+\eta\,\Delta\vec{v}(M,t)}$$ IV

éq$^{t°}$ de Navier-Stokes linéarisée.

15/ on fait la divergence de IV

on aura : $\rho_0\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{div}\,\vec{v}=-\Delta p_1+\eta\,\mathrm{div}\,\Delta\vec{v}$

or $\Delta\vec{v}=\vec{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{v}-\vec{rot}\left(\vec{rot}\,\vec{v}\right)$

d'où $\rho_0\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{div}\,\vec{v}=-\Delta p_1+\eta\,\mathrm{div}\left[\vec{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{v}-\vec{rot}\,\underbrace{\left(\vec{rot}\,\vec{v}\right)}_{=\vec{0}}\right]$

(fluide irrotationnel)

or $\mathrm{div}\,\vec{v}=-\chi_s\frac{\partial p_1}{\partial t}$ d'après II et III

d'où $\rho_0\frac{\partial}{\partial t}\left[-\chi_s\frac{\partial p_1}{\partial t}\right]=-\Delta p_1+\eta\,\mathrm{div}\,\vec{grad}\left[-\chi_s\frac{\partial p_1}{\partial t}\right]$

$$-\rho_0\chi_s\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}=-\Delta p_1-\chi_s\eta\frac{\partial}{\partial t}\left[\mathrm{div}\,\vec{grad}\,p_1\right]$$

$$-\rho_0\chi_s\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}=-\Delta p_1-\chi_s\eta\frac{\partial}{\partial t}(\Delta p_1)$$

$$\Delta p_1+\chi_s\eta\frac{\partial}{\partial t}(\Delta p_1)=\rho_0\chi_s\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}$$

1 $$\boxed{\Delta p_1+\chi_s\eta\frac{\partial}{\partial t}(\Delta p_1)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}}$$

éq$^{t°}$ de propagation de la surpression acoustique $p_1(M,t)$

or on a : $\boxed{\Delta p_1(M,t) + \tau_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta p_1(M,t)\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p_1(M,t)}{\partial t^2}}$ (2)

par identification entre (1) et (2) :

$$\boxed{\tau_0 = \chi_s \eta}$$

AN $\tau_0 = 4,3\,10^{-10} . 10^{-3} = \boxed{4,3\,10^{-13}\,s = \tau_0}$

16/ On injecte la solution dans l'éqᵗ de propagation

$$-\underline{k}^2 \underline{p} - j\omega\tau_0 \underline{k}^2 \underline{p} = -\frac{\omega^2}{c^2}\underline{p}$$

$\boxed{\frac{\omega^2}{c^2} = \underline{k}^2(1 + j\omega\tau_0)}$ relation de dispersion

17/ au second ordre : $\underline{k} = \pm\frac{\omega}{c}\left(1 - \frac{j\omega\tau_0}{2} + \frac{3}{8}\cdot(j\omega\tau_0)^2\right)$

$$\underline{k} = \pm\frac{\omega}{c}\left(1 - j\omega\frac{\tau_0}{2} - \frac{3}{8}\omega^2\tau_0^2\right) = k_1 - jk_2$$

avec $(1-x)^{-1/2} \simeq 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2$

avec $x = j\omega\tau_0$

d'où $k_1 = \frac{\omega}{c}\left(1 - \frac{3}{8}\omega^2\tau_0^2\right)$

et $k_2 = \frac{\omega^2\tau_0}{2c}$

Avec k_1 : caractérise la propagation de l'onde et est lié à la vitesse de phase $v_\varphi = \frac{\omega}{k_1}$, la dépendance de la vitesse de phase avec la pulsation montre que le milieu est dispersif. sinon il est non dispersif.

k_2 est lié à l'absorption de l'onde dans le milieu l'onde est amortie sur une distance caractéristique $\delta = \frac{1}{|k_2|}$

8/ $v_\varphi = \frac{\omega}{k_1} = \frac{\cancel{\omega}}{\frac{\cancel{\omega}}{c}\left(1 - \frac{3}{8}\omega^2\tau_0^2\right)} = \frac{c}{1 - \frac{3}{8}\omega^2\tau_0^2} = \frac{c\left(1+\frac{3}{8}\omega^2\tau_0^2\right)}{1^2 - \left(\frac{3}{8}\omega^2\tau_0^2\right)^2}$ $\ll$

$$\boxed{v_\varphi \simeq c\left(1+\frac{3}{8}\omega^2\tau_0^2\right)}$$

la vitesse de phase est supérieure à la célérité et dépend de ω : le milieu est dispersif à priori

la différence relative est tq : $\frac{v_\varphi - c}{c} = \frac{\cancel{c}\left(1+\frac{3}{8}\omega^2\tau_0^2\right) - \cancel{c}}{\cancel{c}}$

$= \left(1+\frac{3}{8}\omega^2\tau_0^2\right) - 1 \simeq \frac{3}{8}\omega^2\tau_0^2.$

or $\frac{3}{8}\omega^2\tau_0^2 \leqslant \frac{0{,}5}{100}$

$\omega^2 \leqslant \frac{5\,10^{-3} \times 8}{\tau_0^2\; 3}$, $\omega \leqslant \frac{\sqrt{5\,10^{-3} \times \frac{8}{3}}}{\tau_0}$, $\omega \leqslant \frac{0{,}115}{\tau_0}$

$\omega \leqslant \frac{0{,}115}{4{,}3\,10^{-13}}$

$\omega \leqslant 2{,}6\,10^{11}\,\text{rad s}^{-1}$

$2\pi f \leqslant 2{,}6\,10^{11}\,\text{rad s}^{-1}$

$f \leqslant \frac{2{,}6\,10^{11}\,\text{rad s}^{-1}}{2\pi}$

$$\boxed{f \leqslant 4{,}2\,10^{10}\,\text{Hz}}$$

or la gamme de pulsation étudiée est $\omega \leqslant 10^{7}\,\text{rad s}^{-1}$
donc le caractère dispersif est très largement négligeable.

1g/ on a $\underline{p}_1(x,t) = p_m \exp j\left(\omega t - (k_1 - jk_2)x\right)$

$$\boxed{p_1(x,t) = p_m e^{-k_2 x} \cdot \cos(\omega t - k_1 x)}$$

$I(x) = \frac{1}{2}X_s C \left(P_m e^{-2k_2 x}\right)$ ... propagation, donc

car d'après (12) $I = \frac{1}{2} X_s C (\text{amplitude } P_m)^2$

d'où $I_{dB} = 10 \log\left(\frac{P_m^2}{P_{m réf}^2} e^{-2k_2 x}\right) = -10 \log P_{m réf}^2 + 20 \log\left(P_m e^{-k_2 x}\right)$

$= -10 \log P_{m réf}^2 + 10 \log P_m^2 + 20 \log e^{-k_2 x}$

$= \underbrace{10 \log \frac{P_m^2}{P_{m réf}^2}}_{I_R} + 20 \log e^{-k_2 x}$

or $\log X = \frac{\ln X}{\ln 10}$

d'où $I = I_R + 20 \left(\frac{\ln\left(e^{-k_2 x}\right)}{\ln 10}\right)$

$I = I_R + 20\left[-\frac{k_2 x}{\ln 10}\right]$

d'où $\boxed{I_{dB} = I_R - \frac{20 k_2}{\ln 10} x}$

d'où $\alpha = \left|\frac{dI_B}{dx}\right| = \frac{20}{\ln 10} \frac{\omega^2 \tau_0}{2C} = \frac{10 \omega^2 \tau_0}{\ln 10 \cdot C}$

AN

f (kHz)	1	300
α en dB/km	$4{,}9\,10^{-5}$	$4{,}42$

→ Les valeurs obtenues sont bien inférieures aux valeurs mesurées : viscosité n'est pas le phénomène d'absorption dominant dans [cett]e gamme de BF.

[L'am]ortissement de l'onde sonore est dû principalement à la [diss]ociation de certains ions due à la variation de pression [au] passage de l'onde sonore. Ces ions se recomposent avec [un t]emps caractéristique τ_d variant entre 10 µs et 1 ms. [Si] la fréquence de l'onde est proche de $\frac{1}{\tau_d}$, cette succession [de] dissociation/recomposition dissipe beaucoup d'énergie [Cet] amortissement limite beaucoup la portée des sonars [trava]illant à HF.

* Problème n°2 :

Partie I :

A/

1) les éq^{ts} de Maxwell dans le vide en l'absence de charges et de courants :

$$\text{div}\,\vec{E} = 0 \quad (MG)$$

$$\text{div}\,\vec{B} = 0 \quad (M\phi)$$

$$\vec{\text{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (MF)$$

$$\vec{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (MA)$$

• pour trouver l'équation vérifiée par $\vec{E}$, on élimine $\vec{B}$:

$$\vec{\text{rot}}\,(MF) = \vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\,\vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\underbrace{\vec{\text{rot}}\,\vec{B}}_{\text{d'après }(MA)}) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

$$= -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

or $\vec{\text{rot}}\,\vec{\text{rot}}\,\vec{E} = \vec{\text{grad}}(\underbrace{\text{div}\,\vec{E}}_{=0}) - \Delta\vec{E}$

d'où $\boxed{\Delta\vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 . \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}}$ Eq$^{t°}$ de propagation relative à $\vec{E}$.

avec $\boxed{\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}}$

2.1/ on a $\underline{\vec{E}}(M,t) = E_0 \exp j(\omega t - kx)\,\vec{u_y}$

c'est une onde
- • plane (càd les surfaces d'onde sont des plans) $E_0 = cste$
- • progressive ($\exists$ couplage entre t et x) qui se propage dans le sens des x ↗ $(k>0)$
- • polarisée selon $\vec{u_y}$

6

On injecte la forme de l'onde pour trouver la relation de dispersion :

$$(-jk)^2 \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 (j\omega) \vec{E}$$

$$k^2 = \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2$$

$$\boxed{\frac{\omega^2}{c^2} = k^2} \qquad k = \frac{\omega}{c} \text{ (vers les } x \nearrow \text{)}$$

$\ast$ $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{\omega}{\frac{\omega}{c}} = \boxed{c = v_\varphi}$ est indépendant de ω donc le vide n'est pas un milieu dispersif.

3/ D'après (MF) on a $-j \vec{k} \wedge \vec{E} = -j\omega \vec{B}$

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{k}{\omega} \vec{u_x} \wedge \vec{E}$$

$$= \frac{\vec{u_x} \wedge \vec{E}}{c} = \boxed{\frac{E_0}{c} \exp j(\omega t - kx) \vec{u_z} = \vec{B}}$$

/ Cette onde n'est pas réalisable expérimentalement car elle rigoureusement monochromatique, d'amplitude uniforme et extension spatiale infinie

/ $\boxed{n_0 = \dfrac{\rho_{Cu}}{M_{Cu}} N_A}$

$$n_0 = \frac{8{,}92 \cdot 10^3 \times 6{,}02 \cdot 10^{23}}{63{,}5 \cdot 10^{-3}} = \boxed{8{,}46 \cdot 10^{28}\ e^- . m^{-3} = n_0}$$

$n_0 \gg n_1, n_2$

Pour un conducteur métallique (modèle de Drude), on tient compte d'une force de freinage due aux chocs des électrons les atomes du réseau cristallin.

Dans le cas de l'ionosphère, le milieu tellement peu dense qu'on peut négliger les interactions avec les édifices atomiques et moléculaires (chocs)

B/

4/1/ on a $m_e \left(\frac{\partial \vec{v_e}}{\partial t} + (\vec{v_e} \cdot \overrightarrow{grad}) \vec{v_e} \right) = e\vec{E} + e(\vec{v_e} \wedge \vec{B})$

or $\left\| \frac{\partial \vec{v_e}}{\partial t} \right\| \simeq \frac{v_e}{T}$

$\left\| (\vec{v_e} \cdot \overrightarrow{grad}) \vec{v_e} \right\| \simeq \frac{v_e^2}{\lambda} \simeq \frac{v_e^2}{v_\varphi T} < \frac{v_e^2}{c \cdot T}$

donc $\frac{\left\| (\vec{v_e} \cdot \overrightarrow{grad}) \vec{v_e} \right\|}{\left\| \frac{\partial \vec{v_e}}{\partial t} \right\|} \simeq \frac{v_e}{v_\varphi} \leq \frac{v_e}{c} \ll 1$ car les é sont non relativistes

De même $\|\vec{B}\| \simeq \frac{\|\vec{E}\|}{v_\varphi} < \frac{\|\vec{E}\|}{c}$

donc $\frac{\|\vec{v} \wedge \vec{B}\|}{\|\vec{E}\|} \simeq \frac{v}{v_\varphi} < \frac{v}{c} \ll 1$

donc $m_e \frac{\partial \vec{v_e}}{\partial t} = -e\vec{E}$

$j\omega m_e \underline{\vec{v_e}} = -e\underline{\vec{E}}$

$$\boxed{\underline{\vec{v_e}} = -\frac{e}{j\omega m_e} \underline{\vec{E}}}$$

4/2/ De la même façon : $m_c \frac{\partial \vec{v_c}}{\partial t} = e\vec{E}$

$$\boxed{\underline{\vec{v_c}} = \frac{e}{j\omega m_c} \underline{\vec{E}}}$$

4/3/ on a $\underline{\vec{J}} = -n_0 e \vec{v_e} + n_0 e \vec{v_c}$

$$= \frac{n_0 e^2 \vec{E}}{j\omega m_e} + \frac{n_0 e^2 \vec{E}}{j\omega m_c}$$

$$\boxed{\underline{\vec{J}} = \frac{n_0 e^2}{j\omega}\left(\frac{1}{m_e} + \frac{1}{m_c}\right)\vec{E}}$$

or comme $m_c \gg m_e \rightarrow \boxed{\underline{\vec{J}} \simeq \frac{n_0 e^2}{j\omega m_e}\vec{E}}$ (1)

4/4/ $\underline{\gamma}(\omega)$ est définie par $\underline{\vec{J}} = \underline{\gamma}(\omega)\,\vec{E}$ (2) (loi d'ohm locale)

donc $\boxed{\underline{\gamma}(\omega) = \frac{n_0 e^2}{j\omega m_e}}$ par identification entre (1) et (2)

$\underline{\gamma}(\omega)$ est un imaginaire pur, alors que γ est réel pour la conduction métallique.

/ on a $P_v = \vec{J} \cdot \vec{E}$

$$\langle P_v \rangle = \frac{1}{2} Re(\underline{\vec{J}} \cdot \underline{\vec{E}}^*)$$

$$= \frac{1}{2} Re\left(\frac{n_0 e^2}{j\omega m_e} E_0 \exp j(\omega t - kx)\vec{u_y} \cdot E_0 \exp -j(\omega t - kx)\vec{u_y}\right)$$

$$= \frac{1}{2} Re\left(\frac{n_0 e^2}{j\omega m_e} \cdot E_0^2\right) = 0 = \langle P_v \rangle$$

Ce résultat s'explique par l'absence de force dissipative

6/1/ L'eqt° de Maxwell-Ampère devient :

$$\vec{rot}\,\vec{B} = \mu_0\left(\underline{\vec{J}} + \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = \mu_0\left(\frac{n_0 e^2}{j\omega m_e}\vec{E} + \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

$$\boxed{= \mu_0 \varepsilon_0 \left(1 - \frac{n_0 e^2}{\omega^2 m_e \varepsilon_0}\right)\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{rot}\,\vec{B}}$$

on élimine $\vec{B}$, avec les autres égts :

$$\vec{rot}(\vec{rot}\,\vec{E}) = \frac{-\partial}{\partial t}(\vec{rot}\,\vec{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \left(1 - \frac{n_0 e^2}{\omega^2 m_e \varepsilon_0}\right) \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$= \vec{grad}\,\underbrace{div\,\vec{E}}_{=0} - \Delta \vec{E}$$

$$\boxed{\Delta \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \left(1 - \frac{n_0 e^2}{\omega^2 m_e \varepsilon_0}\right) \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}}$$

6/2/ on injecte l'onde dans l'équation de propagation :

$$(-jk)^2 \cdot \vec{E} = \frac{1}{c^2}\left(1 - \frac{n_0 e^2}{\omega^2 m_e \varepsilon_0}\right)(j\omega)^2 \vec{E}$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{n_0 e^2}{\omega^2 m_e \varepsilon_0}\right)$$

càd $k^2 = \frac{1}{c^2}\left(\omega^2 - \frac{n_0 e^2}{m_e \varepsilon_0}\right) = \boxed{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} = k^2}$

6/3/ $\boxed{\omega_p = e\sqrt{\frac{n_0}{m_e \varepsilon_0}}}$

AN $\omega_p = 1,6\,10^{-19}\sqrt{\frac{10^{10}}{9,1\,10^{-31} \times 8,85\,10^{-12}}} = \boxed{6.\,10^6\,rad\,s^{-1} = \omega_p}$ pour $n_0 = n_1$

$\omega_p = 1,6\,10^{-19}\sqrt{\frac{10^{12}}{9,1\,10^{-31} \times 8,85\,10^{-12}}} = \boxed{6\,10^7\,rad\,s^{-1} = \omega_p}$ pour $n_0 = n_2$

7/1/ $\omega < \omega_p$

on a $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} < 0$ donc $k = \pm j\sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}}$ imaginaire pur

donc $\vec{E} = E_0 \exp j\omega t \cdot \exp(-jkx)\,\vec{u_y} = E_0\, e^{\pm j^2\sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}}\,x} \cdot e^{j\omega t}\,\vec{u_y}$

$$\vec{E} = E_0\, e^{\pm\frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c}x}\, e^{j\omega t}$$

il s'agit d'une onde évanescente

(pas de divergence) impose $\vec{E} = \vec{U_y}\, E_0\, e^{-\frac{\sqrt{\omega_p^2-\omega^2}}{c}x}\, e^{j\omega t}$

$$\boxed{k = -j\,\frac{\sqrt{\omega_p^2-\omega^2}}{c}} \quad \text{et} \quad \underline{n} = \frac{k}{\frac{\omega}{c}}$$

$$\boxed{\underline{n} = -j\sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2}-1}}$$

7/2) $\underline{\vec{E}} = E_0\, \vec{U_y}\, e^{-\frac{\sqrt{\omega_p^2-\omega^2}}{c}x}\, e^{j\omega t}$

$$\boxed{\vec{E}(M,t) = E_0\, \vec{U_y}\, e^{-\frac{\sqrt{\omega_p^2-\omega^2}}{c}x} \cos \omega t}$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}\wedge\vec{E}}{\omega} = \frac{k}{\omega}\, \vec{U_x} \wedge E\, \vec{U_y}$$

$$= -j\frac{1}{c}\sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2}-1}\; E\, \vec{U_z}$$

$$= +\frac{1}{c}\sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2}-1}\; E_0\, \vec{U_z}\, e^{-\frac{\sqrt{\omega_p^2-\omega^2}}{c}x} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \vec{U_z}$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2}-1}\; \vec{U_z}\, E_0\, e^{-\frac{\sqrt{\omega_p^2-\omega^2}}{c}x} \sin(\omega t)}$$

3/ C'est une onde évanescente, elle est stationnaire.

t le domaine réactif

4/ $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{\mu_0} \langle \vec{E}\wedge\vec{B} \rangle = \vec{U_x}\, \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2}-1}\; e^{-2\frac{\sqrt{\omega_p^2-\omega^2}}{c}x} \langle \sin(\omega t)\cos(\omega t)\rangle$

$\boxed{\langle \vec{\Pi} \rangle = \vec{0}}$ ce qui est attendu pour une onde stationnaire

/ $\omega > \omega_p$

1/ $k^2 = \frac{\omega^2-\omega_p^2}{c^2} > 0$ donc $\boxed{k = \frac{\sqrt{\omega^2-\omega_p^2}}{c}}$

$$\underline{n} = \frac{k}{\frac{w}{c}} = \boxed{\sqrt{1 - \frac{w_p^2}{w^2}} = \underline{n}}$$

8/2/ $\vec{E} = \vec{U_y}\, E_0\, e^{j\left(wt - \frac{\sqrt{w^2 - w_p^2}}{c}x\right)}$

donc $\boxed{\vec{E} = \vec{U_y}\, E_0 \cos\left(wt - \frac{\sqrt{w^2 - w_p^2}}{c}x\right)}$

or $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{w} = \frac{1}{c}\sqrt{1 - \frac{w_p^2}{w^2}}\; \vec{U_x} \wedge \vec{U_y}\; E_0 \cos\left(wt - \frac{\sqrt{w^2 - w_p^2}}{c}x\right)$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{E_0}{c}\sqrt{1 - \frac{w_p^2}{w^2}}\; \vec{U_z} \cos\left(wt - \frac{\sqrt{w^2 - w_p^2}}{c}x\right)}$$

8/3/ c'est une onde plane progressive monochromatique. Il s'agit du domaine de transparence.

8/4/ $v_\varphi = \frac{w}{k} = c\frac{w}{\sqrt{w^2 - w_p^2}} = \boxed{\frac{c}{\sqrt{1 - \frac{w_p^2}{w^2}}} = v_\varphi}$

v_φ dépend de w, donc le milieu est dispersif

8/5/ • $v_g = \frac{dw}{dk}$ or $w^2 - w_p^2 = k^2 c^2$

$$\cancel{2}w \frac{dw}{dk} = \cancel{2} k c^2$$

$$v_g = \frac{kc^2}{w} = \boxed{c\sqrt{1 - \frac{w_p^2}{w^2}} = v_g} = \frac{c^2}{v_\varphi}$$

càd $v_\varphi \cdot v_g = c^2$

• v_g est la vitesse de propagation d'un paquet d'onde

6/ Pour $w \gg w_p$, $v_g = v_\varphi = c$, le milieu est assimilable au vide c/

9/1/ L'onde incidente est : $\begin{cases} \vec{\underline{E_i}} = E_0 \, e^{j(\omega t - kx)} \vec{u_y} \\ \vec{\underline{B_i}} = \frac{E_0}{C} e^{j(\omega t - kx)} \vec{u_z} \end{cases}$ avec $k = \frac{\omega}{C}$

L'onde réfléchie est : $\begin{cases} \vec{\underline{E_r}} = r_E \, E_0 \, e^{j(\omega t + kx)} \vec{u_y} \\ \vec{\underline{B_r}} = - \frac{r_E \, E_0}{C} e^{j(\omega t + kx)} \vec{u_z} \end{cases}$

L'onde transmise est : $\begin{cases} \vec{\underline{E}}_t = t_E \, E_0 \, e^{j(\omega t - \underline{n} kx)} \vec{u_y} \\ \vec{\underline{B}}_t = \frac{\underline{n} \, t_E \, E_0}{c} e^{j(\omega t - \underline{n} kx)} \vec{u_z} \end{cases}$

D'où les égts, provenant des conditions aux limites

$$\begin{cases} 1 + r_E = t_E \\ 1 - r_E = \underline{n} \, t_E \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = (1 + \underline{n}) \, t_E \\ 1 + r_E = t_E \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_E = \frac{1 - \underline{n}}{1 + \underline{n}} \\ t_E = \frac{2}{1 + \underline{n}} \end{cases}$$

2/ $\omega < \omega_p$ (domaine réactif)

$$r_E = \frac{1 + j\sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}}{1 - j\sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}} = \left(\frac{\omega}{\omega_p} + j\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_p^2}}\right)^2 = e^{j\alpha}$$

avec $\boxed{\alpha = 2\cos^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)}$

pour $\omega \to 0 \rightsquigarrow \alpha \to 0$

$\omega \to \omega_p \rightsquigarrow \alpha \to \frac{\pi}{2}$

$*\ \underline{\vec{E_r}} = E_0\, e^{j\alpha} e^{j(\omega t + kx)} \vec{U_y} \Rightarrow \boxed{\vec{E_r} = E_0 \cos(\omega t + kx + \alpha)\, \vec{U_y}}$

$\underline{\vec{B_r}} = -\frac{E_0}{c} e^{j\alpha} e^{j(\omega t + kx)} \vec{U_z} \Rightarrow \boxed{\vec{B_r} = -\frac{E_0}{c} \cos(\omega t + kx + \alpha)\, \vec{U_z}}$

* L'onde réfléchie a donc la même amplitude que l'onde incidente et elle est déphasée de α en $x=0$ par rapport à l'onde incidente.

9/3/ $\omega > \omega_p$

$*\ \underline{n} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$

donc $r_E = \dfrac{1 - \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} = \boxed{\left(\frac{\omega}{\omega_p} - \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_p^2} - 1}\right)^2 = r_E}$

et $t_E = \dfrac{2}{1 + \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} = \boxed{2\frac{\omega}{\omega_p}\left(\frac{\omega}{\omega_p} - \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_p^2} - 1}\right) = t_E}$

* r_E, t_E et n étant réels ; $\begin{cases} \vec{E_r} = r_E E_0 \cos(\omega t + kx)\, \vec{U_y} \\ \vec{B_r} = -\frac{r_E E_0}{c} \cos(\omega t + kx)\, \vec{U_z} \end{cases}$

et $\begin{cases} \vec{E_t} = t_E E_0 \cos(\omega t - nkx)\, \vec{U_y} \\ \vec{B_t} = \frac{n\, t_E E_0}{c} \cos(\omega t - nkx)\, \vec{U_z} \end{cases}$

Rq1 : Les champs électriques de l'onde réfléchie et de l'onde transmise sont en phase avec l'onde incidente

Rq2 : pour $\omega \gg \omega_p$, $r_E \longrightarrow 0$ et $t_E \to 1$, l'onde est alors intégralement transmise
$n \longrightarrow 1$

D]

10/ on a la hauteur caractéristique est: $\boxed{H = \frac{RT}{M_a g}}$

AN $H = \frac{8,314 \times (25+273)}{30.10^{-3} . 10} \simeq 8,2.10^{3} m \simeq \boxed{8,2 km = H}$

on remarque que l'altitude des couches les plus basses de l'ionosphère est au moins 10H.

11/ on a trouvé $6.10^{6} rad\,s^{-1} < \omega_p < 6.10^{7} rad\,s^{-1}$ en question 6/2

càd $1 MHz < f_p < 10 MHz$

Donc pour f = qq 100 kHz, l'ionosphère se trouve dans le domaine réactif et l'onde se réfléchit sur l'ionosphère.

* cette communication est possible pour f < 10 MHz

12/1/ La communication par satellite est possible dans le domaine de transparence de l'ionosphère càd pour f > 10 MHz

12/2/ on a 3ème loi de Kepler: $\frac{T^2}{(R_T+h)^3} = \frac{4\pi^2}{g R_T^2}$

$R_T + h = \sqrt[3]{\frac{g R_T^2 . T^2}{4\pi^2}}$

$\boxed{h = \sqrt[3]{\frac{g R_T^2 . T^2}{4\pi^2}} - R_T}$

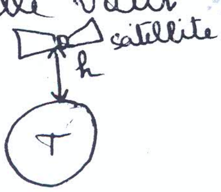
AN $R_T + h \simeq 4,2 . 10^{4} km$

$\boxed{h = 3,6 . 10^{4} km}$

12/3/ plus la fréquence est élevée plus le débit de transmission de données est élevée.

12/4/ Pour f = 10 GHz, $\frac{f_p}{f} < 10^{-3}$ donc $n = \sqrt{1 - \frac{f_p^2}{f^2}} \simeq 1$, l'ionosphère est donc assimilable au vide. La durée minimale d'un aller-retour sol-satellite est obtenue sur une verticale, elle vaut:

aller retour $\tau \simeq \frac{2h}{c} = \frac{2 \times 3,6 . 10^{7}}{3 . 10^{8}} \simeq \boxed{0,24 s = \tau}$



Partie II :

13/ La Loi d'ohm locale : $\boxed{\vec{j} = \gamma_i \vec{E}}$

. Les éqts de Maxwell dans le milieu i :

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_i} \quad (MG)$$

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$$

$$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_i \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

14/ on compare $\vec{j} = \gamma_i \vec{E}$ à $\vec{j}_D = \varepsilon_i \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$\left.\begin{array}{l} \|\vec{j}_D\| \simeq \varepsilon_i \omega \|\vec{E}\| \\ \|\vec{j}\| \simeq \gamma_i \|\vec{E}\| \end{array}\right\} \text{donc } \frac{\|\vec{j}_D\|}{\|\vec{j}\|} \simeq \frac{\varepsilon_i \omega}{\gamma_i} \simeq \frac{80 \times 9\,10^{-12}\,10^{3}}{2} \simeq 4\,10^{-7} \ll 1$$

et $\varepsilon_i \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ est donc négligeable devant $\vec{j}$. L'éqt° de Maxwell-Ampère (ARQS)

* devient $\boxed{\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}}$

15/ $\vec{\mathrm{rot}}\left(\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B}\right) = \mu_0 \gamma_i \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\mu_0 \gamma_i \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$= \vec{\mathrm{grad}}\,\underbrace{\mathrm{div}\,\vec{B}}_{=0} - \Delta\vec{B} = -\mu_0 \gamma_i \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$\boxed{\Delta\vec{B} = \mu_0 \gamma_i \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$ Eqt° différentielle

16/ 1/ à l'aide du formulaire, on trouve :

$$\vec{\Delta \underline{B}} = \left(\Delta \underline{B}_\theta - \frac{\underline{B}_\theta}{r^2}\right)\vec{e_\theta}$$

avec $\Delta \underline{B}_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \underline{B}_\theta}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 \underline{B}_\theta}{\partial z^2} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r \underline{B}'(r)\right) e^{j(\omega t - kz)} - k^2 \underline{B}(r)\, e^{j(\omega t - kz)}$

$$= \left[\frac{1}{r}\left(\underline{B}'(r) + r\,\underline{B}''(r)\right) - k^2\,\underline{B}(r)\right] e^{j(\omega t - kz)}$$

et $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = j\omega \underline{B}(r)\, e^{j(\omega t - kz)}\, \vec{u_\theta}$

d'où $\frac{1}{r}\left(\underline{B}'(r) + r\underline{B}''(r)\right) - k^2 \underline{B}(r) - \frac{\underline{B}(r)}{r^2} = j\omega \mu_0 \gamma_i \underline{B}(r)$

càd $r^2 \underline{B}''(r) + r\underline{B}'(r) - \left((k^2 + j\omega\mu_0\gamma_i) r^2 + 1\right)\underline{B}(r) = 0$

$$\boxed{r^2 \underline{B}''(r) + r\underline{B}'(r) - (k_i^2 r^2 + 1)\,\underline{B}(r) = 0}$$ car $k^2 + j\mu_0\gamma_i\omega = k_i^2$

16/2) $\mu_0 \gamma_i \omega \simeq 4\pi 10^{-7} \times 2.10^{3}$

$\boxed{\mu_0 \gamma_i \omega \simeq 8\pi 10^{-4}\, m^{-2}}$

or $k^2 \simeq \frac{4\pi^2}{(10^{-3})^2} m^{-2} \simeq 4\pi 10^{6}\, m^{-2} = k^2$

on trouve bien que $k^2 \gg \mu_0 \gamma_i \omega$

d'où $k_i^2 \simeq k^2$

$$\boxed{k_i = k}$$

16/3) Cela revient à négliger $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ dans l'éqt° de MF, donc le phénomène d'induction pour le calcul de $\vec{B}$

16/4) L'éqt° s'écrit : $r^2 \frac{d^2B}{dr^2} + r\frac{dB}{dr} - \left((kr)^2 + 1\right)\underline{B} = 0$

avec le changement de variable $x = kr$, $r^2\frac{d^2B}{dr^2} = x^2\frac{d^2B}{dx^2}$

et $r\frac{dB}{dr} = x\frac{dB}{dx}$, on reconnaît l'éqt°,

$x^2\frac{d^2\underline{B}}{dx^2} + x\frac{dB}{dx} - (x^2+1)\underline{B} = 0$ (donnée dans le formulaire avec $n = 1$)

Les solutions sont de la forme :

$$* \quad \underline{B}(r) = \begin{cases} B_{1I}\, I_1(kr) + B_{1K}\, K_1(kr) & \text{dans l'axoplasme} \\ B_{2I}\, I_1(kr) + B_{2K}\, K_1(kr) & \text{dans le milieu extérieur} \end{cases}$$

B_{2I}, B_{2k} sont des ctes complexes.

* $k_1(kr)$ diverge quand $r \to 0 \Rightarrow B_{1k} = 0$

$I_1(kr)$ diverge quand $r \to +\infty \Rightarrow B_{2I} = 0$

* $\underline{B}$ est continu en $r = a$ et $\underline{B}(a)$ est donné par le théorème d'Ampère appliqué sur un cercle de rayon a centré sur l'axe :

$$\underline{B}(a)\, \cancel{e^{j(\omega t - kz)}} \times 2\pi a = \mu_0 i_0\, \cancel{e^{j(\omega t - kz)}}$$

$$\rightarrow \boxed{\underline{B}(a) = \frac{\mu_0 i_0}{2\pi a}}$$

d'où $B_{1I}\, I_1(ka) = \dfrac{\mu_0 i_0}{2\pi a}$

et $B_{2k}\, k_1(ka) = \dfrac{\mu_0 i_0}{2\pi a}$

finalement,

$$\boxed{\underline{B}(r) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 i_0 I_1(kr)}{2\pi a I_1(ka)} & \text{pour } 0 \leq r \leq a \\[2ex] \dfrac{\mu_0 i_0 k_1(kr)}{2\pi a k_1(ka)} & \text{pour } r \geq a \end{cases}}$$

Fin