Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieur de Sfax	IPEIS	04 Janvier 2020 2ème année PC AU : 2019 / 2020

Devoir de synthèse de Physique N° 01
(Durée : 4 H)

Ce sujet est constitué de deux problèmes complètement indépendants.

PROBLEME N° 01

L'eau de mer est considérée comme un fluide homogène, de masse volumique ρ et de compressibilité isentropique constante χ_s. A l'équilibre, le champ de pression est supposé uniforme P_0, la masse volumique est également supposée uniforme ρ_0 et champ de vitesses est uniformément nul $\vec{v}=\vec{0}$.

En présence d'une perturbation (onde acoustique), les champs de pression $p(M,t)$, de vitesses $\vec{v}(M,t)$ et de masse volumique $\rho(M,t)$ sont modifiés : $p(M,t)=P_0+p_1(M,t)$, $\vec{v}(M,t)\neq\vec{0}$ et $\rho(M,t)=\rho_0+\rho_1(M,t)$.

Hypothèses : on suppose que l'écoulement est parfait et on se place dans le cadre de l'approximation acoustique où les perturbations (p_1, $\vec{v}$ et ρ_1) sont de faible amplitude, ce qui amène à conserver que les termes infiniment petit d'ordre 1. On néglige de même l'effet de pesanteur.

A/ Equation de propagation

1- Rappeler la définition d'un écoulent parfait. Donner les conséquences de cette hypothèse dans le cas des acoustiques.

2- Linéariser l'équation d'Euler traduisant le bilan de la quantité de mouvement :

$$\rho(M,t)\left(\frac{\partial\vec{v}(M,t)}{\partial t}+\left(\vec{v}(M,t)\,\overrightarrow{grad}\right).\,\vec{v}(M,t)\right)=-\,\overrightarrow{grad}\,p(M,t).$$

3- Les champs de masse volumique et de vitesses sont liés par l'équation : $\dfrac{\partial\rho(M,t)}{\partial t}+div\left(\rho(M,t)\vec{v}(M,t)\right)=0$. Donner la signification physique de cette relation et la linéariser.

4- On rappelle que la compression isentropique d'un fluide est décrite par le coefficient $\chi_s=\dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial p}\right)_S$.

Etablir une équation linéaire liant $p_1(M,t)$, χ_s et $\rho_1(M,t)$.

5- Etablir l'équation de propagation relative à la surpression acoustique $p_1(M,t)$. En déduire l'expression de la célérité c des ondes acoustiques. Calculer sa valeur dans l'eau. La comparer à la célérité des ondes acoustiques dans un gaz ou dans un solide. Conclure.

On donne : $\rho_0(eau)=10^3\ kg\,m^{-3}$, $\chi_s(eau)=4{,}3\ 10^{-10}\ Pa^{-1}$.

B/ Etude énergétique

6- En partant des équations linéarisées, obtenues précédemment, monter la relation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho_0 v^2(M,t)+\frac{1}{2}\chi_s\,p_1^2(M,t)\right)+div\left(p(M,t)\vec{v}(M,t)\right)=0.$$

Donner la signification physique de cette équation.

7- On pose $e(M,t)=\frac{1}{2}\rho_0 v^2(M,t)+\frac{1}{2}\chi_s p_1^2(M,t)$ et $\vec{\Pi}(M,t)=p(M,t)\vec{v}(M,t)$. Donner les noms et les significations physiques de $\vec{\Pi}(M,t)$ et les deux termes constituant $e(M,t)$.

C/ Onde acoustique plane progressive harmonique

8- Donner la solution générale de l'équation de propagation de la surpression $p_1(x,t)$ dans le cas où l'onde acoustique se propageant suivant les x croissants de l'axe Ox.

9- Dans le cas où l'onde acoustique plane progressive est harmonique, de pulsation ω, la surpression associée est de la forme : $p_1(x,t)=P_m\, cos(\omega t-kx)$. Déduire l'expression du champ de vitesses. Préciser sa direction et conclure.

10- Déterminer les expressions de $\vec{\Pi}(x,t)$ et de $e(x,t)$ associées à l'onde sonore plane progressive. En déduire une relation entre $\vec{\Pi}(x,t)$ et $e(x,t)$. Interpréter.

11- Dans le cadre de l'acoustique sous-marine, on définit l'intensité acoustique I par : $I=\left\|\langle\vec{\Pi}(x,t)\rangle\right\|$. Déterminer l'expression de I en fonction de p_m, χ_s et c.

L'intensité acoustique en décibels est définie par : $I_{dB}=10\, \ell og\, \frac{I}{I_R}$ où I_R est l'intensité de référence associée à une surpression acoustique harmonique d'amplitude $P_{m\,réf}=10^{-6}\,Pa$.

On cherche à vérifier à l'aide de quelques ordres de grandeurs la validité des hypothèses présentées.

Les ondes acoustiques utilisées par les sonars ont des fréquences comprises entre $f=3\,kHz$ et 300 kHz et des puissances variables. Pour évaluer les ordres de grandeurs demandés, on considère une onde acoustique plane progressive harmonique de pulsation $\omega=10^5\,rad\,s^{-1}$ et d'intensité acoustique en décibels $I_{dB}=100\,dB$.

12- Déterminer l'amplitude P_m de la surpression acoustique associée à cette onde. En déduire l'ordre de grandeur de l'amplitude ρ_m de la perturbation de la masse volumique du fluide. Comparer les valeurs obtenues par rapport à celles caractérisant le fluide à l'équilibre (P_0,ρ_0). Conclure.

13- A partir de l'équation d'Euler linéarisée, déduire l'amplitude V_m du champ de vitesses $v(x,t)$ des particules de fluide perturbées par la présence de l'onde acoustique. Comparer la valeur de V_m par rapport à la vitesse de l'onde acoustique dans l'eau $c\approx 1400\,m\,s^{-1}$.

D/ Atténuation d'une onde acoustique dans l'océan

On se place toujours dans le cadre de l'approximation acoustique. Dans cette partie, le fluide est supposé réel. Il est caractérisée par une viscosité dynamique η. L'écoulement de fluide est décrit par une nouvelle équation dite de Navier- Stockes, de la forme :

$$\rho(M,t)\left(\frac{\partial\vec{v}(M,t)}{\partial t}+\left(\vec{v}(M,t)\,\overrightarrow{grad}\right).\,\vec{v}(M,t)\right)=-\,\overrightarrow{grad}\,p(M,t)+\eta\,\Delta\vec{v}(M,t).$$

L'équation de conservation de la masse et l'équation liant $p_1(M,t)$ et $\rho_1(M,t)$ restent inchangées.

14- Linéariser l'équation de Navier- Stockes.

15- Montrer que l'équation de propagation de la surpression acoustique $p_1(M,t)$ dans un fluide visqueux s'écrit sous la forme : $\Delta p_1(M,t)+\tau_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta p_1(M,t)\right)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p_1(M,t)}{\partial t^2}$,

Où c est la célérité de l'onde acoustique et τ_0 est une durée caractéristique à déterminer en fonction de χ_s et η. Donner l'ordre de grandeur de la durée τ_0.

A.N : $\rho_0 = 10^3\ kg\,m^{-3}$, $\chi_s = 4{,}3\ 10^{-10}\ Pa^{-1}$ et $\eta = 10^{-3}\ kg\,m^{-1}s^{-1}$.

16- On cherche des solutions décrivant des pseudo-ondes planes progressives harmoniques se propageant suivant les x croissants de l'axe Ox. Le champ de la surpression acoustique, en représentation complexe est de la forme : $\underline{p}_1(x,t) = P_m\, exp\, j(\omega t - \underline{k}x)$ où P_m est réelle positive $\underline{k}$ est à priori complexe. Déterminer la relation de dispersion liant $\underline{k}$ à ω.

Compte tenu de la valeur de la durée τ_0 et de la gamme de pulsation étudiée $\left(\omega \leq 10^7\ rad\,s^{-1}\right)$, on exprimera les résultats demandés à l'ordre le plus bas (ordre 2) non nul en $(\tau_0\,\omega)$ dans la suite.

17- A partir de la relation de dispersion, déduire l'expression approchée du nombre d'onde $\underline{k}(\omega)$ sous forme : $\underline{k}(\omega) = k_1 - j\,k_2$. Donner le sens physique des termes réels k_1 et k_2.

On donne : $(1+x)^{-1/2} \simeq 1 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{8}x^2$.

18- Déterminer la vitesse de phase v_φ de l'onde acoustique et comparer à la célérité c de cette onde dans l'eau de l'océan en absence de la viscosité. Déterminer le domaine de fréquence pour laquelle la différence relative entre v_φ et c est inférieur à 0,5 %. Conclure.

19- Exprimer le champ de pression réel $p_1(x,t)$. En déduire l'expression du taux α d'atténuation de l'intensité acoustique $\alpha = \left|\dfrac{dI_{dB}}{dx}\right|$. Evaluer numériquement α, exprimé en $dB\ km^{-1}$, pour les fréquences $f_1 = 1\ kHz$ et $f_2 = 300\ kHz$.

Expérimentalement, on mesure les taux d'atténuation suivants : $\alpha(f = 1\ kHz) = 0{,}07\ dB\ km^{-1}$, $\alpha(f = 30\ kHz) = 5\ dB\ km^{-1}$ et $\alpha(f = 300\ kHz) = 100\ dB\ km^{-1}$. Les valeurs calculées théoriquement sont différentes des valeurs mesurées. Citer d'autres causes responsables de l'amortissement de l'onde acoustique lors de la propagation.

PROBLEME N° 02

On donne :

* Vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3\,10^8\ m\,s^{-1}$
* Charge élémentaire : $e = 1{,}6\ 10^{-19}\ C$
* Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi\,10^{-7}\ H\,m^{-1}$
* Constante des gaz parfaits : $R = 8{,}314\ J\,K^{-1}\,mol^{-1}$
* Nombre d'Avogadro : $N_A = 6{,}02\,10^{23}\ mol^{-1}$
* Permittivité électrique du vide : $\varepsilon_0 = 8{,}85\,10^{-12}\ F\,m^{-1}$.

Partie I : Propagation des ondes électromagnétiques dans un plasma

On s'intéresse dans ce problème à la propagation des ondes électromagnétiques dans un plasma et à ses applications dans le domaine des communications, qui font intervenir l'ionosphère terrestre. L'ionosphère, couche de l'atmosphère située entre 80 et 800 km d'altitude, peut être considérée comme un plasma dilué : c'est un milieu ionisé qui contient des électrons libres $(m_e, -e)$, densité volumique n_0 et des cations de charge $(m_c, +e)$ en même densité volumique que les électrons. L'ensemble est donc globalement neutre. On se propose d'étudier la propagation, dans ce milieu, d'ondes électromagnétiques dont le champ électrique est de la forme : $\underline{\vec{E}}(M,t) = E_0\, exp\, j(\omega t - kx)\,\vec{u}_y$, où E_0 et ω sont des réels positifs et k est un nombre à priori complexe. On étudiera ensuite la réflexion et la transmission d'une onde électromagnétique à l'interface vide/plasma. Enfin, on déterminera quelques ordres de grandeurs relatifs aux communications terrestres ou satellitaires.

Données

Masse volumique du cuivre : $\rho_{Cu} = 8,92\,10^3\ kg\,m^{-3}$

Masse molaire de l'élément cuivre : $M_{Cu} = 63,5\ g\,m^{-1}$

Masse molaire de l'air : $M_a = 30\ g.mol^{-1}$

Masse d'un électron : $m_e = 9,1\ 10^{-31}\ kg$

Masse d'un proton : $m_p = 1,67\,10^{-27}\ kg$

Rayon de la Terrestre : $R_T = 6,4\,10^3\ km$

Accélération de la pesanteur à la surface de la terre : $g = 9,8\ m\,s^{-1}$

A/ Préliminaires

1- Rappeler les équations de Maxwell dans le vide en l'absence de charges et de courants. En déduire les équations de propagation des champs électrique $\vec{E}(M,t)$.

2-1- On considère une onde électromagnétique dont le champ électrique est de la forme : $\underline{\vec{E}}(M,t) = E_0 \exp j(\omega t - kx)\vec{u}_y$ où E_0, ω et k sont des réels positifs. Qualifier cette onde.

2-2- À quelle condition cette onde est-elle solution de l'équation de propagation ? Comment appelle-t-on la relation trouvée entre ω et k ? Le vide est-il un milieu dispersif ?

2-3- Déterminer l'expression du champ magnétique $\underline{\vec{B}}(x,t)$ associé.

2-4- L'onde considérée est-elle réalisable expérimentalement? Justifier votre réponse.

3-1- Exprimer et calculer la densité volumique d'électrons libres dans un métal conducteur comme le cuivre en admettant que chaque atome libère un électron libre de conduction.

3-2- Comparer cette valeur à la densité volumique n_0 d'électrons libres dans l'ionosphère, qui est comprise entre $n_1 = 10^{10}\ m^{-3}$ et $n_2 = 10^{12}\ m^{-3}$, selon la couche d'ionosphère considérée.

3-3- Quelle force, exercée sur les électrons libres, dont on tient compte dans un conducteur métallique, peut-on négliger dans l'ionosphère ?

B/ Champ électromagnétique dans un plasma

On admet que la densité volumique de charge dans le plasma reste nulle en présence de l'onde électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$. Le plasma est supposé suffisamment dilué pour pouvoir négliger les interactions entre les particules chargées.

4-1- Écrire l'équation vérifiée par le champ de vitesses $\vec{v}_e(M,t)$ des électrons, supposés non relativistes.

4-2- De même, écrire l'équation vérifiée par le champ de vitesses $\vec{v}_c(M,t)$ des cations.

4-3- En déduire l'expression du vecteur densité de courant $\underline{\vec{J}}(M,t)$ en fonction du champ électrique excitateur de l'onde. Justifier que le terme dû aux cations est négligeable devant celui dû aux électrons.

4-4- En déduire la conductivité complexe $\underline{\gamma}(\omega)$ du plasma. Quelle est la principale différence avec la conductivité d'un métal lorsqu'on se place à basse fréquence ?

5- Calculer la puissance volumique moyenne $\langle \mathcal{P}_v \rangle$ fournie par le champ électromagnétique aux électrons. Expliquer ce résultat.

6-1- Établir l'équation de propagation vérifiée par le champ électrique $\underline{\vec{E}}(M,t)$ dans le plasma.

6-2- En déduire la relation entre k et ω.

6-3- Définir la pulsation plasma ω_P et calculer sa valeur pour chacune des densités électroniques n_1

et n_2.

7- On se place dans le cas où le plasma occupe le demi-espace $x > 0$ et $\omega < \omega_P$.

7-1- Déterminer le nombre d'onde k et l'indice $\underline{n}$ du milieu plasma.

7-2- En déduire, en notation réelle, les champs $\vec{E}(x,t)$ et $\vec{B}(x,t)$ qui règnent dans le plasma.

7-3- Qualifier l'onde obtenue. Comment appelle-t-on le domaine de pulsations considéré ?

7-4- Calculer la moyenne temporelle $\langle \vec{\Pi}(x,t) \rangle$ du vecteur de Poynting. Conclure

8- On se place toujours dans le cas où le plasma occupe le demi-espace $x > 0$ et $\omega > \omega_P$.

8-1- Evaluer le nombre d'onde k et l'indice $\underline{n}$ du milieu.

8-2- En déduire, en notation réelle, les champs $\vec{E}(x,t)$ et $\vec{B}(x,t)$.

8-3- Qualifier l'onde obtenue. Comment appelle-t-on le domaine de pulsations considéré ?

8-4- Déterminer la vitesse de phase v_φ. Le milieu est-il dispersif ?

8-5- Déterminer la vitesse de groupe v_g. Quelle est sa signification ?

8-6- Que se passe-t-il lorsque $\omega >> \omega_P$?

C/ Réflexion et transmission à l'interface vide-plasma

L'onde électromagnétique étudiée à la question **2-/** constitue l'onde incidente, qui se propage dans le vide sous incidence normale à l'interface vide-plasma qui coïncide avec le plan $x = 0$. On admet que le champ électromagnétique est continu à l'interface $x = 0$.

9-1- Calculer le coefficient de réflexion r_E et le coefficient de transmission t_E pour le champ électrique, en fonction de $\underline{n}$.

9-2- Pour $\omega < \omega_P$, déterminer r_E en fonction de ω et montrer qu'il peut se mettre sous la forme $r_E = exp\, j\alpha$, où α est un angle dont on déterminera l'expression et les limites pour $\omega \to 0$ et $\omega \to \omega_P$. En déduire l'expression du champ électrique réfléchi, puis du champ magnétique réfléchi. Commenter ce résultat.

9-3- Pour $\omega > \omega_P$, évaluer les coefficients r_E et t_E en fonction de ω. En déduire l'expression du champ électrique réfléchi et du champ électrique transmis. Commenter ces résultats.

D/ Application aux communications

On applique les résultats obtenus précédents à l'ionosphère décrite au début du problème.

10- Comparer l'altitude de l'ionosphère à l'altitude caractéristique $H = \dfrac{RT}{M_a g}$ de l'atmosphère évaluée dans un modèle d'atmosphère isotherme où l'air, de masse molaire moyenne M_a, est assimilé à un gaz parfait.

11- La première liaison radio intercontinentale fut réalisée en 1901 par Marconi en utilisant des ondes électromagnétiques de *quelques centaines* de kHz. Expliquer le rôle de l'ionosphère en s'appuyant sur l'étude précédente. Pour quelles valeurs de fréquences cette communication est-elle possible ?

12- De nos jours, les communications s'effectuent principalement par l'intermédiaire de satellites, en particulier pour les liaisons internet.

12-1- Pour quelles valeurs de fréquences est-ce possible ?

12-2- On envisage le cas d'un satellite géostationnaire. Déterminer les caractéristiques de son orbite, en particulier son altitude *h*, dans l'hypothèse d'une terre sphérique de rayon R_T.

Indication : Une satellite géostationnaire est immobile dans le référentiel à la Terre. Ils ont donc la même période de révolution $T = 24\ heures$. son mouvement à la 3ème loi de Kepler : $\dfrac{T^2}{(R_T + h)^3} = \dfrac{4\pi^2}{g R_T^2}$.

12-3- À l'heure actuelle, on utilise des ondes de la bande Ku $(12-18\ GHz)$ bande de fréquences pour la télévision par satellite pour ces. La bande Ka $(27-40\ GHz)$ bande de fréquences pour la communication Internet par satellite tend à être de plus en plus utilisée. Quel est l'intérêt de faire appel à des fréquences aussi élevées ?
12-4- Dans le domaine de fréquences élevées, préciser le comportement le plasma lors de la traversée de l'onde électromagnétique. En se basant sur cette hypothèse raisonnable, déterminer la durée minimale d'un aller-retour sol-satellite.

<u>Partie II</u> : Propagation d'un signal électromagnétique dans l'axoplasme

On étudie la propagation de l'influx nerveux le long des axones, fibres qui permettent de relier électriquement entre elles des régions éloignées de l'organisme. On se limite au cas simple des invertébrés : un axone est alors constitué d'un filament cylindrique, appelé axoplasme, entouré d'une membrane très fine constituée d'une double couche lipidique qui le sépare du milieu extérieur. On étudie successivement l'onde électromagnétique dans l'axoplasme, le rôle de la membrane et la forme du signal.

L'axoplasme est modélisé par un cylindre homogène infini d'axe Oz et de rayon a ; une membrane d'épaisseur négligeable le sépare du milieu extérieur, qui est homogène et s'étend jusqu'à l'infini. L'axoplasme (milieu 1) et le milieu extérieur (milieu 2) sont des milieux conducteurs et diélectriques, homogènes et isotropes, non magnétiques; ils obéissent à la loi d'Ohm locale. On note γ_1 et γ_2 leurs conductivités électriques respectives, ε_1 et ε_2 leurs permittivités électriques respectives. Compte tenu des propriétés de ces milieux, les permittivités électriques remplacent, dans les équations de Maxwell, la permittivité électrique du vide ε_0. On repère la position d'un point par ses coordonnées cylindriques (r,θ,z) .

13- Écrire la loi d'Ohm locale et les équations de Maxwell dans le milieu i (i = 1 ou 2).
14- Lors de la propagation de l'influx nerveux, les pulsations observées sont de l'ordre de $\omega = 10^3\ rad\,s^{-1}$. À ces fréquences, les conductivités mises en jeu sont de l'ordre de $\gamma = 2\ Sm^{-1}$ et les permittivités électriques valent à peu près celle de l'eau, c'est-à-dire $\varepsilon \approx 80\ \varepsilon_0$. Montrer que, dans ces conditions, l'approximation des régimes quasi-stationnaires est valable. Quelle est la conséquence de cette approximation sur les équations de Maxwell?
15- Établir, en éliminant $\vec{J}(M,t)$ et $\vec{E}(M,t)$, l'équation différentielle vérifiée par le champ magnétique $\vec{B}(M,t)$ dans l'axoplasme et dans le milieu extérieur.

16- On s'intéresse aux ondes progressives transverses magnétiques de la forme : $\vec{B}(M,t) = B_\theta(r,z,t)\ \vec{u}_\theta$, où $B_\theta(r,z,t)$ s'écrit en notation complexe :
$\underline{B}_\theta(r,z,t) = \underline{B}(r) exp\, j(\omega t - kz)$
L'axoplasme est alors parcouru par un courant dont l'intensité totale dans la direction Oz est :
$i_a(z,t) = i_0\ exp\, j(\omega t - kz)$
16-1- Écrire l'équation différentielle vérifiée par $\underline{B}(r)$. On posera $k_i^2 = k^2 + j\,\mu_0\gamma_i\omega$.
16-2- Les longueurs d'onde typiques de l'influx sont de l'ordre de $\lambda \approx 1\ mm$. Montrer qu'alors $k_i \approx k$. On utilisera cette approximation *dans la suite du problème.*
16-3- Quelle est la conséquence de cette approximation sur les équations de Maxwell? Quel phénomène physique associé néglige-t-on alors ?
16-4- Établir les expressions de $\underline{B}(r)$ dans l'axoplasme et dans le milieu extérieur à l'aide des fonctions de Bessel I_1 et K_1 données en fin de sujet, et en fonction de i_0 et a. Pour cela, on utilisera en

particulier les limites des fonctions de Bessel pour $r \to 0$ ou $r \to +\infty$, et la continuité de $\vec{B}$ à l'interface entre les deux milieux.

Formulaire

- Pour tout champ vectoriel $\vec{A}$, en coordonnées cylindrique (r,θ,z);

* $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\vec{A}\right) = \overrightarrow{grad}\left(div\vec{A}\right) - \Delta\vec{A}$.

* $\overrightarrow{rot}\,\vec{A} = \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_z}{\partial\theta} - \dfrac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{u}_r + \left(\dfrac{\partial A_r}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{u}_\theta + \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\vec{u}_z$

* $\Delta\vec{A} = \left(\Delta A_r - \dfrac{1}{r^2}\left(A_r + 2\dfrac{\partial A_\theta}{\partial\theta}\right)\right)\vec{u}_r + \left(\Delta A_\theta - \dfrac{1}{r^2}\left(A_\theta - 2\dfrac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\right)\vec{u}_\theta + \Delta A_z\,\vec{u}_z$

- Pour une fonction scalaire f en coordonnées cylindrique (r,θ,z);

* $\Delta f = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial f}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

- L'équation différentielle linéaire : $x^2\,y''(x) + x\,y'(x) - \left(x^2+n^2\right)y(x) = 0$

Où n est entier, admet une solution générale une combinaison linéaire des deux solutions linéairement indépendantes $I_n(x)$ et $K_n(x)$, appelées fonctions de Bessel modifiées, qui ont les propriétés suivantes :

1 - Si $x \to 0^+$, $I_n(x) \sim \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{x}{2}\right)^n$; $K_n(x) \sim \dfrac{(n-1)!}{2}\left(\dfrac{2}{x}\right)^n$ pour $n \neq 0$ et $K_0(x) \sim -\ell n\,x$

2 - Si $x \to +\infty$, $I_n(x) \sim \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\,x}}\exp x$; $K_n(x) \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}\exp(-x)$

3 - Pour les fonctions I_0, I_1, K_0 et K_1,

$\dfrac{dI_0(x)}{dx} = I_1(x)$; $\dfrac{dK_0(x)}{dx} = -K_1(x)$; $\dfrac{1}{x}\dfrac{d\left(x\,I_1(x)\right)}{dx} = I_0(x)$ et $\dfrac{1}{x}\dfrac{d\left(x\,K_1(x)\right)}{dx} = -K_0(x)$.