UNIVERSITÉ DE SFAX **Année universitaire : 2019/2020**

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieurs de Sfax

Examen d'Algèbre - Semèstre N°1

Sections : P.C.2 et P.T.2

Durée : 2h **Date : 03 Janvier 2020** **Nbre de pages : 3**

Problème/

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et f un endomorphisme de E. On rappelle :

- Un sous espace F de E est dit stable par f si $f(F) \subset F$ (c-à-d $\forall x \in F$, $f(x) \in F$).
- Le polynôme caractéristique de f, $\chi_f(X) = \det(XI_n - A)$, où A est la matrice de f dans une base donnée.
- Le spectre de f est noté sp(f) l'ensemble des valeurs propres de f.
- Pour toute valeur propre $\lambda \in$ sp(f), le sous espace propre de f associé à λ est

$$E_\lambda(f) = \ker(f - \lambda id_E) = \{x \in E \mid f(x) = \lambda x\}$$

- Si f est diagonalisable, alors, l'espace E admet une base de vecteurs propres de f.

Partie I/

Soit f un endomorphisme de E. On suppose que sp$(f) = \{\lambda_1, ..., \lambda_r\}$, avec $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$.

1. *a)* Montrer que tout sous espace propre de f est stable par f.
   b) Soit $v_1, ..., v_r$ des vecteurs propres de f. Montrer que vect$(v_1, ..., v_r)$ est un sous espace stable par f.
2. Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E, F un sous espace de E de dimension $p \geq 1$ et $\mathcal{B}'$ une base de F.
   a) Montrer que si $\forall i \in \{1, ..., n\}$, $\mathcal{B}' \cup \{e_i\}$ est liée, alors, $F = E$.
   b) Justifier qu'on peut compléter $\mathcal{B}'$ en une base de E par des vecteurs $e_{i_1}, .., e_{i_{n-p}} \in \mathcal{B}$.
   c) On suppose que f est diagonalisable. Soit $\mathcal{B}$ est une base de vecteurs propres de f et F un sous espace de E stable par f. Montrer que F admet un supplémentaire G qui est stable par f (utiliser la question 1. b))

3. On se propose de justifier la réciproque, c'est à dire, si χ_f est scindé et tout sous espace de E stable par f admet un supplémentaire stable par f alors f est diagonalisable. On suppose que χ_f est scindé.

a) Justifier que $E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_r}$ est stable par f.

b) On suppose qu'il existe un sous espace non nul G de E supplémentaire de $E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_r}$ stable par f. Soit g l'endomorphisme de G induit par f.

i– Donner la forme de la matrice M de f dans une base adaptée à $E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_r} \oplus G = E$.

ii– Montrer que χ_g divise χ_f et que $\mathrm{sp}(g) \subset \mathrm{sp}(f)$.

iii– Justifier que χ_g est scindé.

iv– Montrer que $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \notin \mathrm{sp}(g)$. En déduire que $\mathrm{sp}(g) = \emptyset$.

v– Déduire que f est diagonalisable.

On a montré le théorème suivant qu'on utilisera en cas de besoin.

Théorème.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_f est scindé. Alors, f est diagonalisable, si et seulement si, tout sous espace stable par f admet un supplémentaire stable par f.

4. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice M dans la base canonique $\mathcal{B}_3 = (e_1, e_2, e_3)$ est $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) f est-il diagonalisable ? Justifier.

b) Donner un sous espace F non nul de $\mathbb{R}^3$ autre que $\mathbb{R}^3$ qui est stable par f.

c) F admet-il un supplémentaire stable par f ? Justifier.

Partie II/ Réduction de l'endomorphisme induit

Dans cette partie, on fixe un sous espace F de E stable par f de dimension $p \geq 1$. Soit $\widetilde{f}$ l'endomorphisme de F induit par f.

1. Soit $\lambda \in \mathrm{sp}(f)$.

a) Montrer que $E_\lambda(f) \cap F$ est stable par f.

b) Déduire que si $\lambda \neq 0$, alors, $f(E_\lambda(f) \cap F) = E_\lambda(f) \cap F$.

c) Justifier que tout vecteur propre de $\widetilde{f}$ est un vecteur propre de f.

2. Montrer que si $\lambda \in \mathrm{sp}(\widetilde{f})$, alors, $E_\lambda(\widetilde{f}) = E_\lambda(f) \cap F$.

3. On suppose ici que f est diagonalisable. Soit H un sous espace de F stable par $\widetilde{f}$.

a) Montrer que H est stable par f.

b) Soit G un supplémentaire de H dans E qui est stable par f, c-à-d, $H \oplus G = E$.

i–) Pour tout $x_F \in F$, en écrivant $x_F = x_H + x_G$, avec $x_H \in H$ et $x_G \in G$, montrer que $x_G \in F$ puis déduire que $H \oplus (G \cap F) = F$.

ii–) Justifier que $f(x_F)$, $f(x_H)$ et $f(x_G)$ sont tous dans F.

iii–) Déduire que $G \cap F$ est stable par $\widetilde{f}$.

iv–) Déduire que $\widetilde{f}$ est diagonalisable.

4. En considérant $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que sa matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et le sous espace $F = \text{vect}(e_1, e_2)$, montrer que $\widetilde{f}$ est diagonalisable et f n'est pas diagonalisable.

Partie III/ Réduction simultanée.

1. Soit f et g deux endomorphismes de E tels que $\underline{f \circ g = g \circ f}$.
   a) Soit $\lambda \in \text{sp}(f)$.
   i−) Montrer que $E_\lambda(f)$ est stable par g.
   ii−) Soit $\widetilde{g}$ l'endomorphisme de $E_\lambda(f)$ induit par g. Montrer que si g est diagonalisable alors $\widetilde{g}$ est diagonalisable.
   b) On pose $sp(f) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ et $\forall 1 \leq i \leq r$, on note $\widetilde{g}_i$ l'endomorphisme de $E_{\lambda_i}(f)$ induit par g. Montrer que si f et g sont diagonalisables alors E admet une base formée de vecteurs propres à la fois de f et de g.
2. *a)* Soit $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ deux matrices diagonalisables tels que $AB = BA$. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP = diag(\alpha_1, .., \alpha_n)$ et $P^{-1}BP = diag(\beta_1, .., \beta_n)$.
   b) Soit $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ et $M, N \in \text{vect}(A, B)$. Montrer que $MN = NM$.
   c) Soit $\mathcal{C}$ un sous espace de $M_n(\mathbb{K})$ formé de matrices diagonalisables qui vérifie pour tout $A, B \in \mathcal{C}$, $AB = BA$.
   i−) Soit $(N_1, ..., N_p)$ une base de $\mathcal{C}$. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $\forall i \in \{1, ..., p\}$, $P^{-1}N_iP = diag(\alpha_{i,1}, ..., \alpha_{i,n})$.
   ii−) Donner la dimension maximale de $\mathcal{C}$
   iii−) Lorsque $\mathcal{C}$ est de dimension maximale. Donner une base de $\mathcal{C}$.
   d) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, et $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$,
   i−) Justifier que A et B sont diagonalisables.
   ii−) Comparer AB et BA.
   iii−) $A + B$ est-elle diagonalisable ?