Université de Sfax
IPEIS

Année universitaire : 2019-2020
PC2

Devoir de Syntèse N°1

Durée: 2H **Epreuve: Analyse** **Date: 7 Janvier 2020**

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté et au soin de la présentation. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.
Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il na pu être démontré.
N.B. Le sujet comporte un exercice et un problème totalements indépendants.

Exercice :
$(E, \|.\|)$ désigne un espace vectoriel normé de dimension finie, A une partie fermée de E et $f : A \to A$ une application $k-$lipschitzienne avec $k \in]0,1[$.
On considère la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$\begin{cases} x_0 \in A, \\ x_{n+1} = f(x_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant k^n \|x_1 - x_0\|.$$
   (b) En déduire que la série réelle $\sum\limits_{n\geqslant 0} \|x_{n+1} - x_n\|$ converge.
2. On admet la convergence de la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ et on note ℓ sa limite.
   (a) Montrer que : $\ell \in A$ et que l est un point fixe de f, c'est à dire $(f(\ell) = \ell)$.
   (b) Montrer que si l et l' sont deux points fixes de f alors $l = l'$.
   (c) Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}, \|x_n - \ell\| \leqslant \dfrac{k^n}{1-k}\|x_1 - x_0\|$.
3. (a) Démontrer que les applications sin et arctan sont $1-$lipschitziennes sur $\mathbb{R}$.
   (b) Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :
$$g(x,y) = \left(\frac{1}{4}\sin(x-y), 1 - \frac{2}{3}\arctan(x+y)\right).$$
   Montrer que g est $\dfrac{11}{12}-$ lipschitzienne de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme :
$$\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|.$$
   (c) En déduire que le système
$$\begin{cases} 4x = \sin(x-y) \\ 3y = 3 - 2\arctan(x+y), \end{cases}$$
   admet une unique solution dans $\mathbb{R}^2$.

Problème :

Partie I

On considère les intégrales suivantes :

$$J = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2-1}dt \quad \text{et} \quad K = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2-1}dt.$$

1. (a) Montrer que les intégrales J et K sont convergentes.

   (b) En déduire que l'intégrale
   $$I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2-1}dt$$
   est convergente.

   (c) A l'aide du changement de variable $s = \frac{1}{t}$, démontrer que $J = K$ et $I = 2J$.

2. (a) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}$, l'intégrale
   $$J_k = \int_0^1 t^k \ln(t)\, dt$$
   converge.

   (b) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $J_k = -\frac{1}{(k+1)^2}$.

3. Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2} = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2-1}dt - \int_0^1 \frac{t^{2n+2}\ln(t)}{t^2-1}dt.$

4. (a) Calculer la limite de $\dfrac{t^2\ln(t)}{t^2-1}$ lorsque t tend vers 0, puis lorsque t tend vers 1.

   (b) En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que : $\forall t \in]0,1[, \left|\dfrac{t^2\ln(t)}{t^2-1}\right| \leqslant C.$

   (c) En déduire que : $\left|\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2n+2}\ln(t)}{t^2-1}dt\right| \leqslant \frac{C}{2n+1}.$

   (d) Montrer la relation suivante : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = J.$

5. (a) En admettant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$

   (b) En déduire que $I = \dfrac{\pi^2}{4}$.

Partie II

1. Prouver que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$

2. Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\quad \dfrac{1}{n(n+1)(2n+1)^2} = \dfrac{1}{n(n+1)} - \dfrac{4}{(2n+1)^2}.$

3. En déduire que : $\pi^2 = 10 - \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(n+1)(2n+1)^2}.$

4. Soient $h : t \in [1, +\infty[\longmapsto \dfrac{2}{t(t+1)(2t+1)^2}$, $S_p = \sum_{n=1}^{p} h(n)$ et $R_p = \sum_{n=p+1}^{+\infty} h(n)$.

(a) Montrer que h est intégrable sur $[1, +\infty[$.

(b) En remarquant que h est décroissante, prouver pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\int_{p+1}^{+\infty} h(t)dt \leqslant R_p \leqslant \int_{p}^{+\infty} h(t)dt.$$

(c) Montrer que : $\forall t \geqslant 1$, $\dfrac{1}{2(t+1)^4} \leqslant h(t) \leqslant \dfrac{1}{2t^4}$.

(d) En déduire que : $R_p \sim \dfrac{1}{6p^3}$.

⋆⋆⋆Bon Travail⋆⋆⋆