UNIVERSITÉ DE SFAX

Année universitaire : 2019/2020

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieurs de Sfax

Devoir de contrôle d'Algèbre - Semestre N°1

Sections : P.C.2 et P.T.2

Durée : 1h30mn | **Date : 29 Octobre 2019** | **Nbre de pages : 2**

Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$. La trace d'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée $tr(M)$. La matrice identité $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice / (7 points)

1. Montrer que l'application tr est une forme linéaire non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. On pose $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / tr(M) = 0\}$, montrer que H est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donner une base de H.
3. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $tr(B) \neq 0$. On définit l'application

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M &\longmapsto tr(B)M - tr(M)B \end{aligned}$$

   (a) Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   (b) Déterminer $\ker \Phi$.

   (c) Montrer que : $H \oplus \ker \Phi = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   (d) Montrer que $\mathrm{Im}\Phi = H$.

4. Montrer que Φ est un projecteur de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $tr(B) = 1$

Problème/(13 points)

On dit que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement s'il existe $X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ telle que $M.X = \lambda X$.
Pour tout M,N dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que M et N sont semblables s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $M = PNP^{-1}$.

Partie I :

Dans tout ce qui suit on prend $n \geq 1$. On considère les matrices colonnes non nulles : $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ *et* $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$.

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par : $A = aI_n + U^tV$ avec a un réel .

1. Montrer que ${}^tVU$ est un réel qu'on exprimera en fonction des coefficients u_i et v_i.
2. (a) Vérifier que $(U^tV)^2 = kU^tV$ *avec* $k = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$.

   (b) En déduire qu'il existe deux réels α et β tels que $A^2 = \alpha A + \beta I_n$
3. (a) Donner l'expression de $a_{i,j}$ en fonction de a et des coefficients de U et V.

   (b) En déduire que $tr(A) = na + {}^tVU$.
4. Exprimer α et β en fonction de a et $tr(A)$.
5. Soit λ une valeur propre de A.

   (a) Montrer que λ^2 est une valeur propre de A^2.

   (b) En déduire que λ vérifie l'équation : $\lambda^2 - \alpha\lambda - \beta = 0$.
6. Montrer que les seules valeurs propres de A sont

$$\lambda_1 = a \textit{ et } \lambda_2 = tr(A) - (n-1)a.$$

Partie II : Application :

On prend

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \dots & \dots & -1 \\ -1 & 1 & -1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \dots & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme canoniquement associé à A.

1. Vérifier que $A = aI_n + U^tV$, avec a un réel qu'on déterminera.
   En utilisant les résultats de la partie I trouver les valeurs propres de A.
2. Soit $E_2(A) = \{X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \; ; \; AX = 2X\}$ et $E_{2-n}(A) = \{X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \; ; \; AX = (2-n)X\}$
   Montrer que $E_2(A)$ *et* $E_{2-n}(A)$ sont deux sous espaces vectoriels de $M_{n,1}(\mathbb{R})$. Donner une base de chacun.
3. Montrer que $M_{n,1}(\mathbb{R}) = E_2(A) \oplus E_{2-n}(A)$.
4. Montrer que A est semblable à $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 2 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 2-n \end{pmatrix}$