UNIVERSITÉ DE SFAX — Année universitaire : 2021/2022

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ — ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

IPEIS — PC2-PT2

Devoir de contrôle d'Algèbre n°2

Durée : 1H 30 min — **Date : 22 février 2022** — **Nombre de pages : 2**

Problème

Dans tout le problème, soient $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ son sous-espace vectoriel des polynômes de degré inferieure ou égal à n, $(n \in \mathbb{N})$.

1ère Partie :

On désigne par Φ l'application de E dans lui même définie par :

$$\Phi(P)(X) = (X^2 - 1)P''(X) + 4XP'(X) + 2P(X).$$

1. Montrer que Φ induit un endomorphisme de E_n noté Φ_n .
2. (a) Calculer pour tout $k \in \{0, ..., n\}$, $\Phi_n(X^k)$.
   (b) Ecrire la matrice A_n de Φ_n dans la base canonique $\mathfrak{B} = (1, X, \dots, X^n)$ de E_n.
   (c) En déduire que Φ_n est diagonalisable.
3. Soit $k \in \{0, ..., n\}$, montrer qu'il existe une unique base $\mathfrak{B}' = (P_0, \dots, P_n)$ de E_n formée par les vecteurs propres P_k unitaires tels que $\deg P_k = k$.
4. (a) Calculer P_0 et P_1.
   (b) On suppose que $\forall\ 2 \leq k \leq n$, $P_k(X) = X^k + a_{k-1}X^{k-1} + a_{k-2}X^{k-2} + \dots + a_0$.
   Vérifier que $a_{k-1} = 0$ et $a_{k-2} = -\dfrac{k(k-1)}{4k+2}$.

2ème Partie :

1. Montrer que l'application

$$(P, Q) \mapsto \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)(1 - t^2)\, dt$$

   est un produit scalaire sur E que l'on notera $(P|Q)$ et $\|.\|$ sa norme associée.
2. Vérifier que pour tout $(P, Q) \in E^2$,

$$(XP|Q) = (P|XQ).$$

3. (a) Montrer que pour tout $(P, Q) \in E^2$, $(\Phi(P)|Q) = (P|\Phi(Q))$.
   (**Ind.** On peut remarquer que $\Phi(P) = ((X^2-1)P)''$.)

   (b) En déduire que, pour tout couple (k, k') d'entiers naturels tel que $k \neq k'$, on a $(P_k|P_{k'}) = 0$ et que la base $(P_0, \cdots, P_n)$ de la $1^{\text{ère}}$ partie est une base orthogonale de E_n.

   (c) En déduire que pour tout $k \geq 1$ et pour tout $Q \in E_{k-1}$, on a $(P_k|Q) = 0$.

4. Soit $k \in \{0, \cdots, n\}$.

   (a) Etablir que $(P_k - XP_{k-1}) \in E_{k-1}$ et que $(P_k - XP_{k-1}) \in (E_{k-3})^{\perp}$.

   (b) Déduire que $P_k - XP_{k-1} \in \text{Vect}(P_{k-1}, P_{k-2})$ et que
$$P_k = XP_{k-1} - \frac{(k-1)(k+1)}{(2k-1)(2k+1)}P_{k-2}.$$

   (c) Calculer P_2 et P_3.

5. Soit $k \in \{0, \cdots, n\}$.

   (a) Montrer que $\|P_k\|^2 = (P_k|X^k)$.

   (b) En déduire $(\Phi(P_k)|X^{k+2})$.

   (c) Exprimer $(P_k|X^{k+2})$ en fonction de $\|P_k\|^2$.

   (d) Montrer que $\|P_k\|^2 = \dfrac{k(k+1)}{2(2k+1)}\|P_{k-1}\|^2 + \dfrac{k(k-1)^2(k+1)}{2(2k-1)(2k+1)^2}\|P_{k-2}\|^2$.

6. Dans cette question, on prend $n = 3$.

   (a) Soit $P \in E_3$. Exprimer $p_{E_2}(P)$ la projection orthogonale sur E_2 en fonction de P_0, P_1, P_2.

   (b) Calculer $\displaystyle\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_{-1}^{1} (t^3 - a - bt - ct^2)^2(1-t^2)dt$.

$3^{\text{ème}}$ Partie :

Soit l'équation différentielle définie sur $]-1, 1[$
$$\text{(H)} : (x^2-1)f''(x) + 4xf'(x) - k(k+3)f(x) = 0.$$

1. On suppose que $P_p(x) = x^p + a_{p-1}x^{p-1} + a_{p-2}x^{p-2} + \cdots + a_1x + a_0$ est une solution polynomiale de (H).
   Montrer que $(p-k)(p+k+3) = 0$ et déduire que $\deg(P) = k$.

2. Justifier que (H) admet une solution non polynomiale f_k de la forme $f_k(x) = \lambda(x)P_k(x)$, où λ est une fonction définie sur $]-1, 1[$ et vérifiant une équation différentielle qu'on déterminera.

3. Pour $k = 0$, déterminer P_0 et f_0.
   (**Ind.** Remarquer que $\dfrac{2}{x^2-1} = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}$).