⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ **Année universitaire : 2021/2022**

**Institut Préparatoire aux Etudes d'Ingénieur de Sfax**

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

**Examen d'Analyse - Semèstre N°2**
**Section : P.C.2-P.T.2**

**Durée : 2h** **Date : 9 Mai 2022** **Nbre de pages : 3**

## Exercice 1 / (4 pts)

On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à $n \in \mathbb{N}$. Soit $a \in \mathbb{R}$, on pose

$$\begin{array}{rcl} N_a : \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)|dt. \end{array}$$

1. Montrer que $N_a$ est une norme sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. On muni $\mathbb{R}_n[X]$ par la norme $N_a$. Soit

$$\begin{array}{rcl} f_a : \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(a). \end{array}$$

   (a) Montrer que $f_a$ est continue sur $\mathbb{R}_n[X]$.

   (b) En déduire que l'ensemble

$$\Omega_a = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \text{ tel que } P(a) \leq n\}$$

   est un fermé de $\mathbb{R}_n[X]$.

   (c) L'ensemble $\Omega_a$ est-il borné ?

## Exercice 2/ (6 pts)

Soit $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(2xt)}{ch^2(t)} dt.$$

1. Montrer que $F$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Vérifier que pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$ch^2(u) = \frac{e^{-2u}}{4}(e^{2u}+1)^2.$$

(b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = 1 - 4x \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2xt)}{1+e^{2t}} dt.$$

3. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^{+\infty} \sin(2xt)e^{-2nt} dt = \frac{x}{2(n^2+x^2)}.$$

(b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = 1 + 2x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+x^2}.$$

**Problème/ (10 pts)**

On dispose d'une pièce de monnaie amenant Pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et Face avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

## Partie I

On effectue une succession de lancers avec cette pièce et on définit la variable aléatoire $X$ prenant la valeur du nombre de Face obtenus avant l'obtention du deuxième Pile.

1. Décrire les évènements $[X = 0]$, $[X = 1]$ et $[X = 2]$ puis calculer leurs probabilités.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P[X = n] = (n+1)\frac{4}{3^{n+2}}.$$

## Partie II

On effectue une succession de lancers avec la pièce précédente jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; puis en fonction du nombre $n$ de Face obtenus, on place $n+1$ boules dans une urne, les boules étant numérotées de 0 à $n$ et indiscernables au toucher, et enfin on pioche au hasard une boule dans cette urne. On note toujours $X$ la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face obtenus, et on note $U$ la variable aléatoire prenant la valeur du numéro de la boule obtenue. On pose $V = X - U$.

1. (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire $U$.

   (b) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de $U$ sachant $[X = n]$.

   (c) En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P[U = k] = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} P[X = n] \quad \text{puis} \quad P[U = k] = \frac{2}{3^{k+1}}.$$

   (d) Montrer que $U$ admet une espérance et une variance et les calculer.

2. (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable $V$.
   (b) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de $V$ sachant $[X = n]$.
   (c) En déduire la loi de $V$.
3. Montrer que les variables aléatoires $U$ et $V$ sont indépendantes.
4. Que vaut $Cov(U, V)$? En déduire $Cov(X, U)$.

## Partie III

Dans cette partie, p désigne un réel de $]0, 1[$.
Deux individus $A$ et $B$ s'affrontent dans un jeu de Pile ou Face dont les règles sont les suivantes :

- le joueur A dispose d'une pièce amenant Pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et lance cette pièce jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; on note $X$ la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus ;
- le joueur $B$ dispose d'une autre pièce amenant Pile avec la probabilité $p$ et lance cette pièce jusqu'à l'obtention d'un Pile ; on note $Y$ la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus ;
- Le joueur $A$ gagne si son nombre de Face obtenus est inférieur ou égal à celui de $B$; sinon c'est le joueur $B$ qui gagne.

On dit que le jeu est équilibré lorsque les joueurs $A$ et $B$ ont la même probabilité de gagner.

1. On note $Z$ la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de lancers effectués par le joueur $B$.
   (a) Reconnaître la loi de $Z$ et préciser son(ses) paramètre(s), son espérance et sa variance.
   (b) Exprimer $Y$ à l'aide de $Z$ et en déduire l'existence de l'espérance et de la variance de $Y$ et préciser leurs valeurs.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$P[Y \geq n]) = (1-p)^n.$$
2. (a) Montrer que
$$P[X \leq Y] = \sum_{n=0}^{+\infty} P[X = n]P[Y \geq n].$$
   (b) Déduire des résultats précédents que
$$P[X \leq Y] = \frac{4}{(2+p)^2}.$$
   (c) Déterminer la valeur de $p$ pour laquelle le jeu est équilibré.

Bon Travail