INSTITUT PREPARATOIRE
AUX ETUDES D'INGENIEUR
SFAX
Département Maths -Info

PT 2 PC 2
Mai 2017

Durée : 2h

EXAMEN 2 : Analyse

Problème :

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramétres respectifs a et b.

Partie I

1. Calculer la fonction génératrice de X , en déduire les espérances $E(X)$ et $E(X(X-1))$.
2. Identifier la loi de la variable aléatoire $X+Y$.
3. Soit n un entier naturel non nul.
   (a) Montrer que $P(X=k \mid X+Y=n) = \dfrac{n!a^k b^{n-k}}{k!(n-k)!(a+b)^n}, \forall\ 0 \leq k \leq n.$
   (b) On déduire que la variable aléatoire (X sachant $X+Y=n$) suit une loi binomiale q'on déterminera les paramètres.
4. Exprimer la probabilité de l'événement $(X=Y)$ comme la somme d'une série numérique.
5. Faire de même pour l'événement $(|X-Y|=k)$ oú k est un nombre entier positif donné.

Le but de la deuxiéme partie est de trouver un équivalent simple de $P(X=Y)$ dans le cas ou $b=a$ et $a \to +\infty$

Partie II

On considére l'équation différentielle

$$(E): \quad xy" + y' - xy = 0$$

et on cherche la solution y de cette équation qui vérifie la condition initiale $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

1. On cherche y comme somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ d'une série entière.

   (a) Montrer que les coefficients vérifient l'équation de récurrence :

   $$(n+1)^2 a_{n+1} = a_{n-1} \qquad n \geq 1$$

   (b) Trouver alors la développement de y en série entière en précisant son rayon de convergence R.

2. On définit une fonction I par l'expression intégrale

   $$I(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}dt.$$

   (a) Trouver D_I ,le domaine de définition de I, puis montrer que I est de classe C^1 sur D_I

   (b) Montrer que I vérifie l'équation (E) et déduire que $I = y$.

3. En développant e^{-tx} en série, puis en intégrant terme á terme, montrer directement que les fonctions y et I coincident.

   Ind :On pourra utiliser la formule $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta)^{2n} d\theta = \frac{\pi}{2}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$ pour n entier positif.

4. Montrer que

   (a) $\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}dt < \frac{1}{2} \qquad$ si $x > 0$

   (b) $\displaystyle 0 < \frac{1}{\sqrt{1-y}} - 1 < y \qquad$ si $0 < y < \frac{1}{2}$.

5. Montrer, en utilisant l'intégrale de Gauss ($\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\theta^2} d\theta = \sqrt{\pi}$), que:

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{x}}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

   (b) $\displaystyle\int_0^1 e^{-tx}\sqrt{t}dt < \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ pour $x > 0$.

6. (a) Montrer que $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}dt = \frac{e^x}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{e^{-\theta x}}{\sqrt{\theta(1-\frac{\theta}{2})}}d\theta.$

   (b) Déduire de ce qui précède que $I(x) \sim \dfrac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}$ lorsque x tend vers l'infini.

   "On montre d'abord que : $\displaystyle\frac{e^{-\theta x}}{\sqrt{\theta}} < \frac{e^{-\theta x}}{\sqrt{\theta(1-\frac{\theta}{2})}} < \frac{e^{-\theta x}}{\sqrt{\theta}} + \frac{1}{2}e^{-\theta x}\sqrt{\theta}$ pour $\theta \in]0,1[$".

7. Donner un équivalent á la probabilité de l'événement $(X = Y)$ lorsque X et Y suivent une loi de Poisson de même paramétre a tendant vers l'infini.