UNIVERSITÉ DE SFAX

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieurs de Sfax

Année universitaire : 2016/2017

Devoir de contrôle N°2
Sections : PC2-PT2

Durée : 1h30mn	21 Février 2017	Nb de pages : 2

N.B : La qualité et la clarté de la rédaction entreront pour une part importante dans l'évaluation de la copie.

Problème

Partie I

Soit E l'espace vectoriel défini par $E = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tel que $x \mapsto f^2(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}\}$.

1) Montrer que si f, $g \in E$, alors la fonction $x \mapsto f(x)g(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

2) Soit l'application définie sur $E \times E$ par :

$$< f, g >= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx.$$

Montrer que $< \, , \, >$ est un produit scalaire sur E.

3) Soit $H = \{f \in E$ tel que $f(0) = 0\}$.

(a) Montrer que H est un hyperplan de E et donner un supplémentaire de H dans E.

(b) Montrer que $H^\perp = \{0\}$ (*ind.* si $f \in H^\perp$ alors l'application $g : x \longmapsto \frac{x^2}{1+x^2} f(x)$ est dans H).

(c) La décomposition $E = H \oplus H^\perp$ est-elle vraie ?

4) On admet que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $I_k = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \frac{(2k)!}{k!2^k}\sqrt{2\pi}$.

Soit φ la forme linéaire sur E définie par $\varphi(f) = f(0)$.

En considérant la suite de fonctions définie par $f_n(x) = e^{-nx^2}$, $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il n'existe aucune fonction $g \in E$ telle que $\forall f \in E$, $\varphi(f) =< f, g >$.

Partie II

On considère l'application h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

1) (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $h^{(n)}(x) = P_n(x)h(x)$ et $P_{n+1}(X) = P_n'(X) - XP_n(X)$, où $h^{(n)}$ désigne la dérivée n-ème de h.

(b) Donner P_0, P_1 et P_2.

(c) En déduire que P_n est de degré n, de coéfficient dominant $(-1)^n$ et de même parité que n.

2) (a) En utilisant $h^{(n+2)}(x) = P_{n+2}(x)h(x)$ et $h^{(n+2)}(x) = (h')^{(n+1)}(x)$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme P_n vérifie l'équation différentielle

$$y'' - xy' + ny = 0.$$

(b) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P'_n = -nP_{n-1}$.

Dans la suite, on pose $H_n = (-1)^n P_n$.

3) Soit $n \geq 2$ un entier naturel. On considère $\mathbb{R}_n[X]$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (1, X, \ldots, X^n)$. On considère l'application $\Phi \ : \ \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par :

$$\Phi(P) = P'' - XP'$$

(a) Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) Ecrire la matrice de Φ dans la base $\mathcal{B}$.

(c) Déterminer le spectre de Φ. En déduire que Φ est diagonalisable.

(d) En remarquant que $\Phi(P)(x) = \left(P'(x)e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' e^{\frac{x^2}{2}}$, montrer que Φ est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}_n[X]$.

(e) En déduire que $(H_0, \ldots, H_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$ formée de vecteurs propres de Φ.