UNIVERSITÉ DE SFAX — Année universitaire : 2016/2017

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieurs de Sfax

Examen d'Algèbre - Semestre N°2
Sections : P.C.2 et P.T.2

Durée : 2h — **Date : 2 Mai 2017** — **Nbre de pages : 2**

Exercice 1/

Soient $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
On note $\mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^1$ définies sur Ω.
Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère l'equation aux dérivées partielles :

$$E_\lambda : \qquad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lambda f(x,y)$$

On note $F_\lambda(\Omega)$ l'ensemble des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^1$ définies et solutions de E_λ sur Ω.

1) **a/** Montrer que $F_\lambda(\Omega)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$.

b/ Soit $f \in F_\lambda$ de classe $\mathcal{C}^2$.

Montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ appartiennent à $F_{\lambda-1}(\Omega)$.

c/ Soit λ , μ deux réels. Vérifier que si $f \in F_\lambda(\Omega)$ et $g \in F_\mu(\Omega)$ alors $fg \in F_{\lambda+\mu}(\Omega)$

2) On note $r_\lambda : \Omega \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $r_\lambda(x,y) = (\sqrt{x^2+y^2})^\lambda$.

Vérifier que $r_\lambda \in F_\lambda(\Omega)$.

3) Soient $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ et $(x,y) \in \Omega$ fixé. Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $\varphi(t) = f(tx, ty)$.

a/ Justifier que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer $\varphi'(t)$.

b/ Montrer que : $f \in F_0(\Omega) \iff \forall (x,y) \in \Omega \ , \ \forall t > 0 \ , \ f(tx,ty) = f(x,y)$.

c/ En déduire que les solutions de E_0 sur Ω sont les fonctions de la forme :

$$(x,y) \mapsto \varphi\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \quad \text{où} \quad \varphi \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}).$$

4) Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Notons $g : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = \dfrac{f(x,y)}{(\sqrt{x^2+y^2})^\lambda}$.

a/ Montrer que : $f \in F_\lambda(\Omega) \iff g \in F_0(\Omega)$ (utiliser la question 1) c/).

b/ Déterminer les fonctions solutions de E_λ sur Ω.

Exercice 2/

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices réelles d'ordre n. La trace d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée $tr(A)$ et la transposée de A est notée ${}^tA$. Notons par $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles d'ordre n, $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques réelles d'ordre n et par $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n.

On dit qu'une matrice $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est **définie positive** si

$$ {}^tX.S.X \geq 0, \quad \text{pour tout X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}). $$

Notons par $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives réelles d'ordre n.

L'objectif ici est de déterminer la distance d'une matrice donnée à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Rappelons que la distance $d(A, F) = \inf_{M \in F} ||A - M||$, où F partie non vide de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Partie 1

1. Montrer que l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$$(A, B) \longmapsto \langle A, B \rangle = tr({}^tAB)$$
est un produit scalaire sur E.
2. Montrer que $E = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
3. Soit p la projection orthogonale sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour $A \in E$, $p(A) = \dfrac{A + {}^tA}{2}$.
4. En déduire que pour $A \in E$, $d\big(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})\big) = \dfrac{1}{2} || {}^tA - A||$.
5. En déduire $d\big(A, \mathcal{A}_n(\mathbb{R})\big)$, pour tout $A \in E$.

Partie 2

Dans cette partie, on se donne $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si λ est une valeur propre de S alors $\lambda \in \mathbb{R}_+$.
2. Montrer qu'il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ et $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $S = {}^tPDP$, où D est la matrice diagonale définie par $D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
3. Montrer que pour tout $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, on a $||S - M|| = ||D - PM\,{}^tP||$.
4. Montrer que $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow PM\,{}^tP \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
5. En déduire que $d\big(S, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\big) = d\big(D, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\big)$.
6. Montrer que $tr(DM) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$, pour tout $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
7. Montrer que pour tout $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, on a $||D - M||^2 = n - 2tr(DM) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2$.
8. En utilisant les questions 6. et 7., déduire que $d\big(D, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\big) = ||D - I_n||$.
9. Conclure que $d\big(S, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\big) = ||S - I_n||$.