Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieur de Sfax

IPEIS

ÉPREUVE DE PHYSIQUE DE LA FIN DU DEUXIÈME SEMESTRE

MP2 – PT2

06 Mai 2016

Durée : 4h

PROBLEME 1 : FONCTIONNEMENT D'UN FER A SOUDER

La panne d'un fer à souder électrique, de forme cylindrique comprend deux parties :

- Une partie « libre » AB en cuivre ($\lambda = 350\ W\,m^{-1}K^{-1}$), de longueur $L = 50$ mm, de diamètre $d = 6\ mm$, qui est soumise à des échanges convectifs avec l'air ambiant caractérisés par un coefficient d'échange $h = 17\ W\,m^{-2}K^{-1}$. La température de l'air ambiant est égale à $T_\infty = 20\ °C$.
- Une partie BC de longueur $\ell = 30\ mm$, située à l'intérieur de l'enveloppe et chauffée par une résistance électrique.

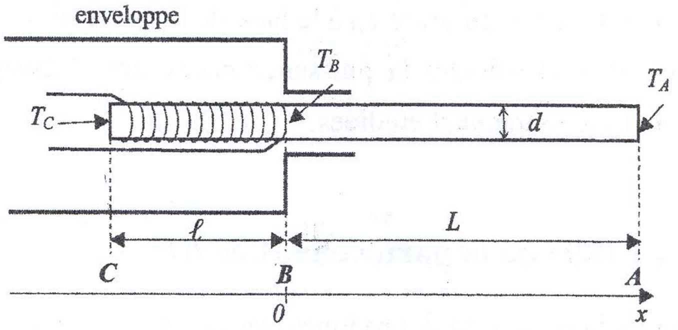

Figure 1

On supposera que le fonctionnement du fer est tel que :

- le flux à l'extrémité libre A de la panne est nul en dehors des périodes de soudure,
- le fer est régulé et la température à cette même extrémité doit être maintenue à une température compatible avec le travail éventuel de soudure, soit $T_A = 210°C$, l'enveloppe est adiabatique c'est-à-dire qu'il n'y a pas de perte thermique vers l'extérieur,
- le flux à l'extrémité C de la partie chauffée est négligeable,
- la puissance ϕ fournie par la résistance est uniformément répartie sur la longueur ℓ.

Partie I : Étude de la partie libre AB

I.1. Montrer que l'on peut supposer, compte tenu des dimensions, de la conductivité thermique de la partie libre et des échanges avec l'air ambiant, que la température dans chaque section de AB peut être considérée comme uniforme et par conséquent la température ne dépend que de x.

I.2. En tenant compte de l'hypothèse démontrée à la question précédente, effectuer un bilan thermique sur un élément de volume d'extension longitudinale δx et déduire que l'équation de transfert dans la partie libre en régime permanent s'exprime sous la forme :

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - k^2\theta = 0 \text{ où } k^2 = \frac{4h}{\lambda d} \text{ et } \theta = T(x) - T_\infty .$$

On justifiera clairement et sans ambiguïté la forme de tous les termes intervenant dans le bilan thermique.

I.3. Préciser les conditions aux limites en A en dehors des périodes de soudure.

I.4. En tenant compte de ces conditions aux limites, résoudre l'équation de transfert obtenue à la question I.2 et montrer que la loi d'évolution de la température $T(x)$ en régime permanent le long de AB vérifie :

$$T(x) - T_\infty = (T_A - T_\infty)\, ch\big(k(x-L)\big)$$

I.5. En déduire la température T_B à la base de la partie libre.

I.6. Déterminer et calculer la puissance nécessaire P dissipée par la résistance dans les conditions de fonctionnement étudiées.

Partie II : Étude de la partie chauffée BC

II.1. Calculer la puissance ϕ_ℓ produite dans la partie chauffée par unité de longueur.

II.2. Effectuer un bilan thermique sur un élément de volume d'extension longitudinale δx de la partie chauffée BC et montrer que l'équation de transfert dans BC en régime permanent s'exprime sous la forme :

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{4\phi_\ell}{\lambda\pi d^2} = 0$$

II.3. Résoudre cette équation en tenant compte des conditions aux limites que l'on précisera.

II.4. Calculer alors la température T_C à l'extrémité C de la partie chauffée.

Partie III : Étude du régime transitoire : chauffage de la partie libre par la résistance

On cherche à évaluer le temps de montée en température nécessaire pour atteindre le régime permanent qui a fait l'objet des deux parties précédentes.

L'écart de température entre les deux extrémités de la partie libre étant faible, l'évaluation se fera en supposant que la partie *AB*, pendant le régime transitoire, a une température homogène *T(t)* à chaque instant. On cherche donc le temps nécessaire pour que la partie *AB* passe de sa température initiale égale à celle de l'air ambiant jusqu'à une température moyenne de $T_m = 215\ °C$.

III.1. Écrire le bilan thermique en régime transitoire, bilan qui doit traduire le fait que toute la puissance dissipée par la résistance $R = 2500\ \Omega$ du fer, soumise à une tension $U = 220\ V$ sert d'une part à chauffer la partie *AB* et d'autre part à compenser à chaque instant les échanges convectifs entre la partie libre et l'air ambiant. Le coefficient d'échange par convection est le même que celui défini précédemment et on donne la masse volumique du cuivre $\rho = 9\ 000\ kg\ m^{-3}$ et sa chaleur spécifique $C_p = 380\ J\ kg^{-1}°C^{-1}$.

III.2. Montrer que ce bilan conduit à une équation différentielle du premier ordre avec second membre à laquelle obéit la température T(t) et montrer que la solution d'une telle équation est (on pourra poser $\theta = T - T_\infty$) :

$$T - T_\infty = \frac{U^2}{Rh\pi dL}\left(1 - \exp\left(-\frac{4h}{\rho C_p d}t\right)\right)$$

III.3. Calculer le temps mis pour atteindre le régime permanent.

PROBLEME 2 : ONDES EN MECANIQUE QUANTIQUE

Dans toute cette partie, dans un souci de simplification, on se restreint à l'étude de phénomènes unidimensionnels, x représentant alors la variable d'espace et t celle de temps.

Données numériques :

- Constante de Planck : $h = 6{,}62\,10^{-34}\ Js$; ($\hbar = \frac{h}{2\pi}$) ;
- Masse de l'électron : $m_e = 9{,}1\ 10^{-31}\ Kg$;
- Charge de l'électron : $e = 1{,}6\,10^{-19}\ C$

Partie I : Dualité onde-corpuscule

I.1.

I.1.a/ Énoncer la relation de de Broglie pour une particule matérielle de masse m, reliant la quantité de mouvement p et la longueur d'onde λ.

I.1.b/ Interpréter cette relation physiquement.

I.1.c/ Calculer λ pour un électron accéléré par une différence de potentiel de $U=10V$. Citer une application.

I.2.

I.2.a/ Décrire une expérience d'interférences entre ondes de matière avec un dispositif de type fentes d'Young et un faisceau de particules incident monocinétique.

I.2.b/ Décrire l'onde associée aux particules permettant d'interpréter simplement ses principaux résultats, en particulier en termes de probabilités.

I.2.c/ Cette expérience permet-elle de vérifier la relation de de Broglie et de préciser le lien énergie-fréquence des particules dans ce cas ?

I.3.

I.3.a/ Le bon choix pour des particules libres est de relier l'énergie et la fréquence de la même façon que pour des photons. Définir le vecteur d'onde k. En utilisant l'expression classique reliant l'énergie E et la quantité de mouvement p, établir l'équation de dispersion reliant k à ω et déduire que le vide correspond à un milieu dispersif pour une particule libre de masse m. Définir les vitesses de groupe v_g et de phase v_ϕ pour la fonction amplitude de probabilité ; comparer v_g à v_ϕ et commenter le résultat obtenu.

I.3.b/ Montrer que les ondes de de Broglie de la forme $\psi(x,t) = \psi_0 \exp\left(i\frac{px - Et}{\hbar}\right)$ satisfaisant cette relation de dispersion sont solutions d'une équation aux dérivées partielles simple que l'on précisera.

I.3.c/ Montrer que la généralisation de ce raisonnement lorsque la particule évolue dans un champ de force dérivant d'une énergie potentielle $V(x)$ est compatible avec l'équation postulée par Schrödinger :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}+V(x)\psi(x,t)=i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}$$

(On exprime l'énergie de la particule E en fonction de la quantité de mouvement p et l'énergie potentielle $V(x)$)

I.3.d/ Quelle est la propriété de l'équation de Schrödinger qui prouve la possibilité d'avoir des interférences d'ondes de matière ?

I.4.

I.4.a/ Définir la probabilité de trouver la particule entre x et $x+dx$, et la densité de probabilité associée.

I.4.b/ Montrer qu'une onde plane ne peut pas décrire une particule matérielle.

I.5. On décrit alors une particule par un paquet d'ondes qui est la superposition d'ondes planes sinusoïdales :

$\psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}g(k)e^{i(kx-\omega t)}dk$ où $g(k)$ est la densité spectrale de $\psi(x,t)$.

On suppose que le paquet d'ondes est à spectre gaussien : $g(k)=C\,\mathrm{e}^{-\frac{(k-k_0)^2}{2\sigma^2}}$ où C et σ sont deux constantes réelles.

I.5.a/ Calculer la fonction d'onde $\psi(x,0)$ à l'instant t=0.

I.5.b/ Déterminer la constante C en utilisant la condition de normalisation de la fonction d'onde $\psi(x,0)$.

On donne : $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha y^2}e^{-i\xi y}dy=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}}$

I.5.c/ Donner l'expression de la fonction d'onde $\psi(x,t)$ à un instant t quelconque.

I.5.d/ Dans le cas d'un spectre peu étalé autour de $p_0=\hbar k_0$, montrer que la fonction d'onde s'écrit sous la forme : $\psi(x,t)=e^{i\frac{p_0v_g-E_0}{\hbar}t}\psi(x-v_gt,0)$ où v_g et E_0 sont des constantes dont on donnera les significations physiques.

Partie II : Puits de potentiel infini

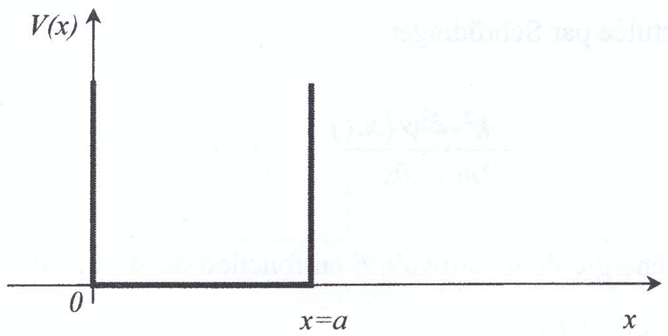

Figure 2

On définit un puits de potentiel $V(x)$ par : $V(x) = \begin{cases} +\infty & pour\ x < 0 \\ 0 & pour\ \ 0 \le x \le a \\ +\infty & pour\ x > a \end{cases}$

II.1.

II.1.a/ Donner les conditions aux limites vérifiées par la fonction d'onde $\psi(x,t)$, en $x = 0$ et $x = a$.

II.1.b/ Résoudre l'équation de Schrödinger pour une particule piégée dans le puits et vérifier que les solutions stationnaires peuvent s'écrire : $\psi(x,t) = \varphi(x)\exp\left(-i\frac{E}{\hbar}t\right)$

où $\varphi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin(kx)$ et E est l'énergie de la particule confinée.

II.1.c/ Donner les valeurs de k et de E compatibles avec les conditions aux limites et montrer que les valeurs de E possibles sont discrètes (on exprime k et E en fonction d'un nombre quantique n).

II.2.

II.2.a/ Sans faire de calcul détaillé, estimer un ordre de grandeur de Δp pour une particule dans le premier état.

II.2.b/ En déduire un commentaire sur la valeur du premier niveau d'énergie trouvé, et expliquer pourquoi les niveaux d'énergie d'une particule confinée doivent être discrets.

II.2.c/ On piège une particule de masse $m = 9{,}1.10^{-31}\,kg$ dans un puits d'extension $a = 1{,}5\,10^{-10}\,m$. Calculer l'énergie de l'état fondamental et faire un commentaire sur l'ordre de grandeur obtenu.

II.3.

II.3.a/ Donner l'expression de la fonction d'onde $\psi_n(x,t)$ pour les deux premiers états quantiques ($n=1$ et $n=2$).

II.3.b/ Déduire la densité de probabilité de présence et la représenter pour les deux premières valeurs du nombre quantique n.

II.3.c/ On envisage étudier l'évolution temporelle d'une fonction d'onde construite comme une combinaison linéaire de deux fonctions d'onde stationnaires :

$$\psi_{1,2}(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_1(x,t)+\psi_2(x,t)\right)$$

Donner la densité de probabilité de présence et montrer qu'elle oscille périodiquement dans le temps à une fréquence ν qu'on déterminera (état non stationnaire).

II.4. Le système à une dimension est en équilibre thermique avec un thermostat à la température T. On admet que le système ne se trouve pas dans un état stationnaire mais dans une combinaison statistique de deux états quantiques affectés des poids respectivement proportionnels au facteur de Boltzmann :

- un état fondamental ① d'énergie $E_1 = E_0 - \varepsilon$
- un état excité ② d'énergie $E_2 = E_0 + \varepsilon$

II.4.a/ Exprimer la probabilité d'occupation p_n de l'état d'énergie E_n.

II.4.b/ En déduire le rapport r entre la probabilité d'occupation de l'état d'énergie E_2 et celle de l'état d'énergie E_1. Comment la température influence-t-elle ce résultat ?

II.4.c/ Déterminer l'énergie moyenne $<E>$ du système en équilibre thermodynamique.

II.4.d/ Représenter la variation de l'énergie moyenne du système en fonction de la température. Commenter.

Partie III : Puits de potentiel asymétrique

On considère une particule piégée, $0 < E < V_0$, dans le puits de potentiel de la figure 3.

$$V(x)=\begin{cases}\infty & pour\ x<0 & (Région\ I)\\ 0 & pour\ 0\le x\le a & (Région\ II)\\ V_0 & pour\ x>a & (Région\ III)\end{cases}$$

On cherche un état stationnaire de l'équation de Schrödinger de la forme : $\psi(x,t)=\varphi(x)\,e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$

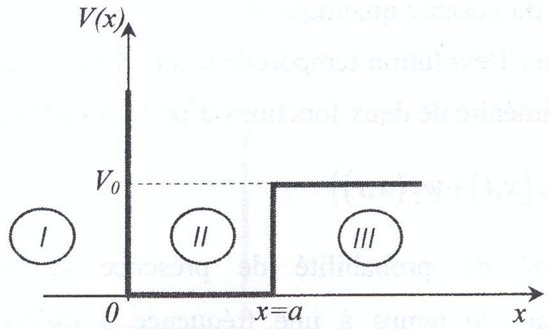

Figure 3

III.1.

III.1.a/ Donner les relations de continuité en $x = 0$ et en $x = a$.

III.1.b/ Montrer que pour $E < V_0$, la fonction d'onde pour un état lié par le puits s'écrit :

$$\begin{cases} \varphi(x) = A\sin(qx) & pour\ \ 0 \le x \le a \\ \varphi(x) = B\, e^{-x/x_0} & pour\ \ x > a \end{cases} \qquad \text{Où } E = \frac{\hbar^2 q^2}{2m} \text{ et } x_0 = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V_0 - E)}}$$

Il n'est pas demandé de déterminer A et B.

III.1.c/ La solution met en évidence une longueur caractéristique x_0. Donner une interprétation physique de x_0. Existe-t-il une longueur équivalente pour une particule matérielle classique ? Donner un exemple de longueur analogue dans un autre domaine de la physique.

III.2.

III.2.a/ Utiliser les conditions aux limites pour en déduire que le vecteur d'onde q doit satisfaire à la relation : $cotg(y) = -\frac{\sqrt{\gamma^2 - y^2}}{y}$, $y = qa$ et $V_0 = \frac{\hbar^2\gamma^2}{2ma^2}$.

III.2.b/ Tracer qualitativement les solutions graphiques de cette équation. On précisera en particulier la pente de la fonction g définie par $g(y) = -\frac{\sqrt{\gamma^2 - y^2}}{y}$ en $y = \gamma$.

III.3.

III.3.a/ Montrer qu'aucun état lié n'existe pour des valeurs de V_0 inférieures à un seuil W que l'on déterminera.

III.3.b/ Donner une interprétation de l'existence de ce seuil.