INSTITUT PREPARATOIRE
AUX ETUDES D'INGENIEURS
SFAX
Département de la Préparation
Mathématiques Physique

PC2-PT2
Avril 2018
Durée : 2h

Devoir de contrôle $N^{\circ}2$

Problème 1:

Notez bien que **les deux parties suivantes sont indépendantes.**

Partie I:

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \tau, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi est donnée par:

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{1}{e\ 2^{i+1} j!}.$$

1. Déterminer les lois de X et de Y.

2. (a) Prouver que $1 + X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X.

   (b) Déterminer l'espérance et la variance de Y.

3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes?

4. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.

Partie II:

1. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes. On suppose que Y suit une loi de poisson de paramètre λ et que la loi de X conditionnée par l'événement $(Y = n)$ est la loi Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
   En utilisant le système complet d'événements $(Y = i)_{i\in\mathbb{N}}$, montrer que X suit une loi de Poisson dont on déterminera le paramètre.

2. On considère une entreprise de construction produisant des objets sur deux chaines de montage A et B qui fonctionnent indépendemment l'une de l'autre. Pour une chaine donnée, les fabrications des pièces sont indépendantes. On suppose que A produit 60% des objets et B produit 40% des objets. La probabilité qu'un objet construit par la chaine A soit défectueux est 0.1, alors que, la probabilité pour qu'un objet construit par la chaine B soit défectueux soit 0.2.

   (a) On choisit au hasard un objet à la sortie de l'entreprise. On constate que cet objet est défectueux. Calculer la probabilité de l'événement "l'objet provient de la chaine A".

(b) On suppose de plus que le nombre d'objets produits en une heure par A est une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 20$. On considère la variable aléatoire X représentant le nombre d'objets défectueux produits par la chaine A en une heure.

  i. Rappeler la loi de Y, ainsi que son espérance et sa variance.

  ii. Soient k et n deux entiers naturels, déterminer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(X = k | Y = n)$. (Indication: on distinguera les cas $k \leq n$ et $k > n$).

  iii. En utilisant la question 1, montrer que X suit une loi de Poisson de paramètre 2.

Problème 2:

1. Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$.

   (a) Déterminer le domaine de définition de f.

   (b) Montrer que f est 2π-périodique, et continue sur $\mathbb{R}$.

   (c) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner $f'(x)$.

2. (a) Déterminer le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{u^n}{n^3}$.

   On pose $S(u) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^n}{n^3}$.

   (b) Montrer que S est de classe C^∞ sur $]-1, 1[$.

   (c) i. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 e^{-nt}\, dt$. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie.

   ii. Calculer I_n en fonction de n.

   (d) Montrer que $S(u) = \displaystyle\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{ut^2}{e^t - u}\, dt$ pour $u \in]-1, 1[.(*)$

   (e) On admet que $(*)$ reste vraie pour $u = e^{ix}$ où $x \in]0, 2\pi[$.
   Montrer que pour tout $x \in]0, 2\pi[$, $f(x) = \displaystyle\frac{\sin x}{4}\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{\mathrm{ch}(t) - \cos x}\, dt$.

3. On pose $\quad w(t, x) = \displaystyle\frac{t^2}{\mathrm{ch}(t) - \cos x} \quad$ et $\quad g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{\mathrm{ch}(t) - \cos x}\, dt$.

   (a) Montrer que $t \mapsto w(t, x)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, pour tout $x \in]0, 2\pi[$.

   (b) Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.

   (c) Montrer que g est de classe C^1 sur $]0, 2\pi[$ et donner $g'(x)$ sous forme d'une intégrale.

   (d) Montrer que pour tout $x \in]0, 2\pi[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} = \frac{\cos x}{4}\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{\mathrm{ch}(t) - \cos x}\, dt - \frac{\sin^2(x)}{4}\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(\mathrm{ch}(t) - \cos x)^2}\, dt.$$

BON TRAVAIL