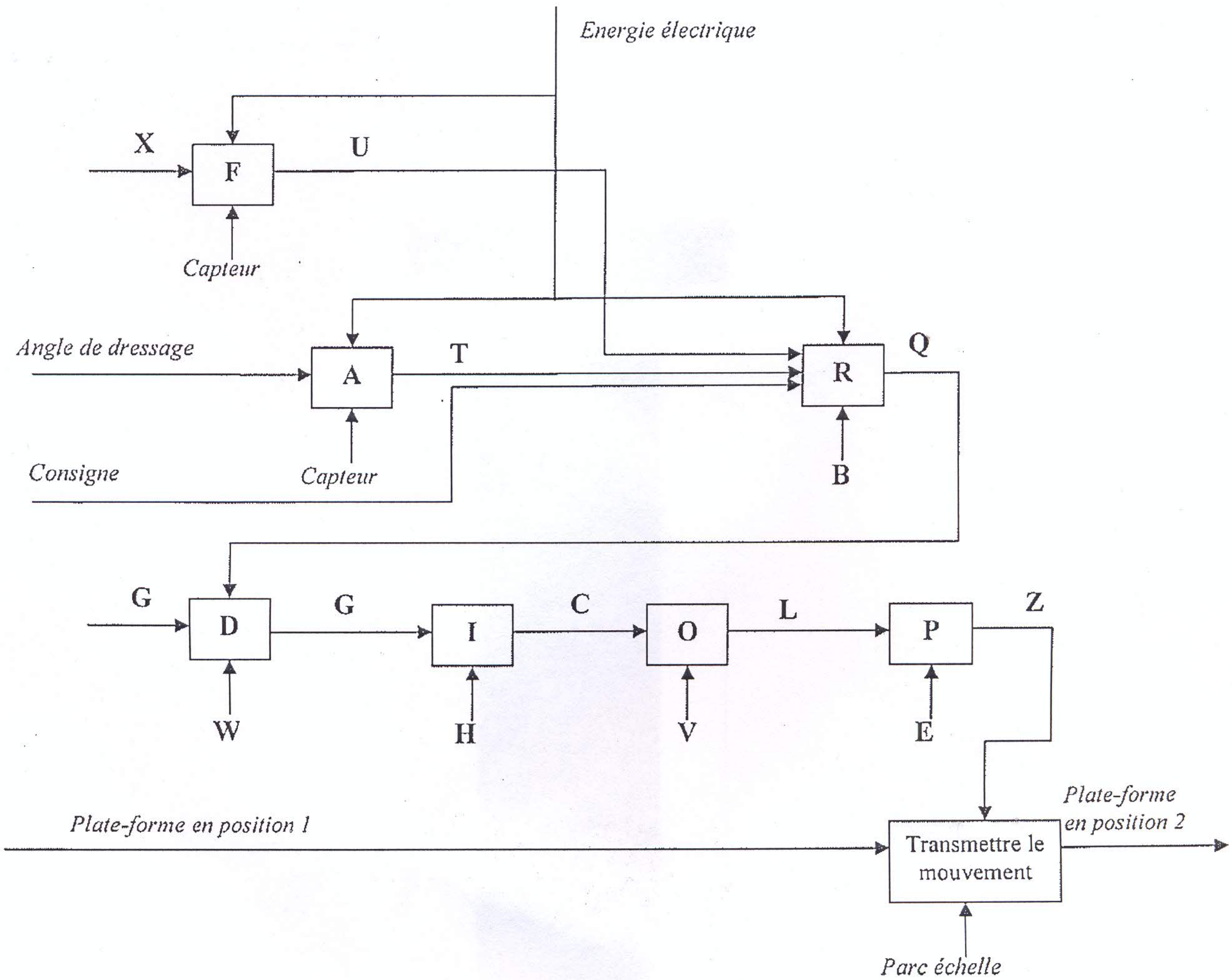
Correction examen MSI de fin du semestre 2

Question I.1.



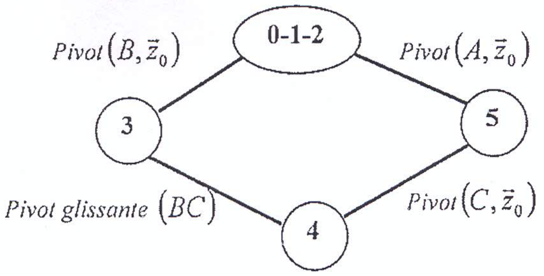
Question II.1.

$$\overrightarrow{V}(D \in 5/0) = \overrightarrow{V}(A \in 5/0) + \overrightarrow{\Omega}(5/0) \wedge \overrightarrow{AD}$$

$$\boxed{\overrightarrow{V}(D \in 5/0) = H\dot{\theta}\vec{y}_5}$$

Question II.2.

Graphe de liaison :



Écriture de la fermeture cinématique :

$$\{\vartheta(5/0)\}_C + \{\vartheta(0/3)\}_C + \{\vartheta(3/4)\}_C + \{\vartheta(4/5)\}_C = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_C$$

Calcul des vecteurs vitesse

$$\vec{V}(C \in 5/0) = \vec{V}(A \in 5/0) + \vec{\Omega}(5/0) \wedge \overrightarrow{CD} = c\dot{\theta}\vec{y}_5$$

$$\vec{V}(C \in 0/3) = \vec{V}(B \in 0/3) + \vec{\Omega}(0/3) \wedge \overrightarrow{CB} = r\dot{\beta}\vec{x}_3$$

Expression de la fermeture cinématique en fonction du paramétrage :

$$\left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}\vec{z}_0 \\ c\dot{\theta}\vec{y}_5 \end{array} \right\}_C + \left\{ \begin{array}{c} -\dot{\beta}\vec{z}_0 \\ r\dot{\beta}\vec{x}_3 \end{array} \right\}_C + \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ -v\vec{y}_3 \end{array} \right\}_C + \left\{ \begin{array}{c} \left(\dot{\beta} - \dot{\theta}\right)\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_C = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_C$$

D'où :

$$c\dot{\theta}\vec{y}_5 + r\dot{\beta}\vec{x}_3 - v\vec{y}_3 = \vec{0}$$

Le résultat demandé est obtenu par projection sur $\vec{y}_3$: $v = c\dot{\theta}\vec{y}_5.\vec{y}_3$

$$\boxed{v = c\dot{\theta}\cos(\theta - \beta)}$$

Question II.3.

Fermeture géométrique :

$$\overrightarrow{O_0B} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AO_0} = \vec{0}$$

Qui s'exprime en fonction du paramétrage :

$$b\vec{x}_0 + r\vec{y}_3 - c\vec{x}_5 - a\vec{y}_0 = \vec{0}$$

En projection respectivement sur $\vec{x}_0$ et sur $\vec{y}_0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} b - r\sin\beta - c\cos\theta = 0 \\ r\cos\beta - c\sin\theta - a = 0 \end{array} \right.$$

D'où :

$$\boxed{\tan\beta = \frac{b - c\cos\theta}{a + c\sin\theta}}$$

Question II.4.

La vitesse du point D du parc échelle est constante :

$$\left\|\vec{V}(D \in 5/0)\right\| = cte = H\dot{\theta}$$

Or :

$$\dot{\theta} = \frac{v}{c.\cos(\theta - \beta)}$$

avec :

$$\beta = \arctan\left(\frac{b - c\cos\theta}{a + c\sin\theta}\right)$$

D'où :

$$\boxed{v = \frac{cte}{H}.c.\cos\left[\theta - \arctan\left(\frac{b - c\cos\theta}{a + c\sin\theta}\right)\right]}$$

Question III.1.

G est le centre de gravité de 5 donc :

$$\vec{\sigma}_G(5/0) = [I_G(5)]\ \vec{\Omega}_{5/0} = I_{Gz}\dot{\theta}\,\vec{z}_0$$

$$\vec{V}(G \in 5/0) = \vec{V}(A \in 5/0) + \vec{\Omega}(5/0) \wedge \overrightarrow{AG} = -\frac{h}{3}\dot{\theta}\vec{x}_5 + \left(\frac{L}{2} - d\right)\dot{\theta}\vec{y}_5$$

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_A(5/0) &= \vec{\sigma}_G(5/0) + \overrightarrow{AG} \wedge 3m\vec{V}(G \in 5/0)\\ &= \left[I_{GZ} + 3m\left[\left(\frac{L}{2} - d\right)^2 + \frac{h^2}{9}\right]\right]\dot{\theta}\,\vec{z}_0\end{aligned}$$

Or A est fixe dans le mouvement de 5/0, donc :

$$\boxed{\vec{\delta}_A(5/0) = \frac{d}{dt}[\vec{\sigma}_A(5/0)]_{/0} = \left[I_{GZ} + 3m\left[\left(\frac{L}{2} - d\right)^2 + \frac{h^2}{9}\right]\right]\ddot{\theta}\vec{z}_0}$$

Question III.2.

La plate-forme restant toujours horizontale, elle est animée d'un mouvement de translation (circulaire), on en déduit donc :

$$\vec{\delta}_{G_P}(6/0) = \vec{0}$$

$$\vec{\delta}_A(6/0) = \vec{\delta}_{G_P}(6/0) + M\vec{\gamma}(G_P \in 6/0) \wedge \overrightarrow{G_PA}$$

Or :

$$\overrightarrow{AG_P} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG_P} = H\vec{x}_5 + \lambda\vec{x}_0 + \mu\vec{y}_0$$

On calcul le vecteur vitesse et accélération du G_P par rapport à (0) :

$$\vec{V}(G_P \in 6/0) = \left.\frac{d\overrightarrow{AG_P}}{dt}\right|_0 = H\dot{\theta}\vec{y}_5$$

$$\vec{\gamma}(G_P \in 6/0) = \left.\frac{d\vec{V}(G_P \in 6/0)}{dt}\right|_0 = H\ddot{\theta}\vec{y}_5 - H\dot{\theta}^2\vec{x}_5$$

En effectuant le calcul on obtient :

$$\boxed{\vec{\delta}_A(6/0) = M\left[H\ddot{\theta}\,(H + \lambda\,\cos\theta + \mu\sin\theta) + H\dot{\theta}^2\,(-\lambda\sin\theta + \mu\cos\theta)\right]\vec{z}_0}$$

Question III.3.

Théorème du moment dynamique à l'ensemble (5+6) en projection sur $(A, \vec{z}_0)$:

$$\vec{\delta}_A(\{5+6\}/0).\vec{z}_0 = \vec{M}_A\left(\overline{\{5+6\}} \rightarrow \{5+6\}\right).\vec{z}_0$$

Inventaire des actions mécaniques extérieures appliquées sur l'ensemble $\{5+6\}$:

— Action 0 sur 5

$$\vec{M}_A(0 \rightarrow 5).\vec{z}_0 = 0$$

— Action du vérin sur 5 : d'après l'énoncé c'est un glisseur de résultante $\vec{R} = R\vec{y}_3$ appliqué au point C.

$$\begin{aligned}\vec{M}_A(4 \rightarrow 5).\vec{z}_0 &= \vec{M}_C(4 \rightarrow 5).\vec{z}_0 + \left(\vec{R} \wedge \overrightarrow{CA}\right).\vec{z}_0\\ &= 0 + cR\,(\vec{x}_5 \wedge \vec{y}_3)\,.\vec{z}_0 = cR\,(\vec{z}_0 \wedge \vec{x}_5)\,.\vec{y}_3 = cR\,(\vec{y}_5.\vec{y}_3)\\ &= cR\cos(\theta - \beta)\end{aligned}$$

— Action de $\vec{g}$ sur 5 :

$$\vec{M}_A(\vec{g} \to 5).\vec{z}_0 = \left(\vec{AG} \wedge -3mg\vec{y}_0\right).\vec{z}_0$$
$$= -3mg\left[\left(\frac{L}{2}-d\right)\cos\theta - \frac{h}{3}\sin\theta\right]$$

— Action de $\vec{g}$ sur 6 :

$$\vec{M}_A(\vec{g} \to 6).\vec{z}_0 = \left(\vec{AG_P} \wedge -Mg\vec{y}_0\right).\vec{z}_0$$
$$= -Mg\left[H\cos\theta + \lambda\right]$$

Théorème du moment dynamique à l'ensemble (5+6) en projection sur $(A, \vec{z}_0)$:

$$\delta_A = cR\cos(\theta-\beta) - 3mg\left[\left(\frac{L}{2}-d\right)\cos\theta - \frac{h}{3}\sin\theta\right] - Mg\left[H\cos\theta + \lambda\right]$$

avec :

$$\delta_A = \left[I_{GZ} + 3m\left[\left(\frac{L}{2}-d\right)^2 + \frac{h^2}{9}\right]\right]\ddot{\theta} + M\left[H\ddot{\theta}\left(H + \lambda\cos\theta + \mu\sin\theta\right) + H\dot{\theta}^2\left(-\lambda\sin\theta + \mu\cos\theta\right)\right]$$

D'où l'expression de l'effort des vérins :

$$\boxed{R = \frac{\delta_A + 3mg\left[\left(\frac{L}{2}-d\right)\cos\theta - \frac{h}{3}\sin\theta\right] + Mg\left[H\cos\theta + \lambda\right]}{c.\cos\left(\theta-\beta\right)}}$$

Question IV.1.
Tous les solides sont en translation puisque l'angle de dressage est ici considéré constant, donc leurs énergies cinétiques sont de la forme $\frac{1}{2}mv^2$:

— Plate-forme :

$$E_{cPf} = \frac{1}{2}mV^2$$

— Plan 1 :

$$E_{cP1} = \frac{1}{2}MV^2$$

— Plan 2

$$E_{cP2} = \frac{1}{2}M\frac{V^2}{4}$$

— Plan 3

$$E_{cP3} = \frac{1}{2}M\frac{V^2}{16}$$

— Plan 4 (fixe)

$$E_{cP4} = 0$$

D'où l'énergie cinétique totale de l'ensemble (plate-forme + plans) :

$$\boxed{E_c(plate-forme+plans) = \frac{1}{2}\left(m + \frac{21}{16}M\right)V^2}$$

Question IV.2. Le treuil est en rotation autour d'un axe fixe :

$$\boxed{E_c(Treuil) = \frac{1}{2}I\omega^2}$$

On peut exprimer ω en fonction de la vitesse V et du rayon du treuil R :

$$V(Plan3/0) = \frac{V}{4} = R\omega$$

D'où :

$$E_c(Treuil) = \frac{1}{2}\frac{I}{16R^2}V^2$$

Question IV.3.

$$P_{ext} = P(\vec{g} \to P_f/0) + P(\vec{g} \to P_1/0) + P(\vec{g} \to P_2/0) + P(\vec{g} \to P_3/0) + P(\vec{g} \to P_4/0) + P(mot \to Tre/0)$$

avec :

$$P(\vec{g} \to P_f/0) = -mg\vec{y}_0.V\vec{x}_1 = -mgV\sin\theta$$
$$P(\vec{g} \to P_1/0) = -MgV\sin\theta$$
$$P(\vec{g} \to P_2/0) = -Mg\frac{V}{2}\sin\theta$$
$$P(\vec{g} \to P_3/0) = -Mg\frac{V}{4}\sin\theta$$
$$P(\vec{g} \to P_4/0) = 0$$
$$P(mot \to Tre/0) = C\omega$$

D'où :

$$\boxed{P_{ext} = C\omega - V\left(m + \frac{7}{4}M\right)g\sin\theta}$$

Question IV.4.

$$P_{\text{int}} = P\left(P_3 \leftrightarrow P_4\right) + P\left(P_2 \leftrightarrow P_3\right) + P\left(P_1 \leftrightarrow P_2\right)$$

avec

$$P\left(P_1 \leftrightarrow P_2\right) = \left\{\tau\left(P_2 \to P_1\right)\right\}\left\{\vartheta\left(P_1/P_2\right)\right\} = \left\{\begin{array}{c} -F\vec{x}_1 \\ - \end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c} \vec{0} \\ \frac{V}{2}\vec{x}_1 \end{array}\right\} = -F\frac{V}{2}$$

$$P\left(P_2 \leftrightarrow P_3\right) = \left\{\tau\left(P_3 \to P_2\right)\right\}\left\{\vartheta\left(P_2/P_3\right)\right\} = \left\{\begin{array}{c} -F\vec{x}_1 \\ - \end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c} \vec{0} \\ \left(\frac{V}{2} - \frac{V}{4}\right)\vec{x}_1 \end{array}\right\} = -F\frac{V}{4}$$

$$P\left(P_4 \leftrightarrow P_3\right) = \left\{\tau\left(P_4 \to P_3\right)\right\}\left\{\vartheta\left(P_3/P_4\right)\right\} = \left\{\begin{array}{c} -F\vec{x}_1 \\ - \end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c} \vec{0} \\ \frac{V}{4}\vec{x}_1 \end{array}\right\} = -F\frac{V}{4}$$

D'où :

$$\boxed{P_{int} = -FV}$$

Question IV.5. Théorème de l'énergie cinétique appliqué à l'ensemble (Treuil + parc échelle + plate-forme) :

$$\frac{d}{dt}E_c = P_{ext} + P_{\text{int}}$$

Soit : $\Gamma = \frac{dV}{dt}$

$$\left[m + \frac{21}{16}M + \frac{I}{16R^2}\right]\dot{V}V = -FV + \left[\frac{C}{4R} + g\left(m + \frac{7}{4}M\right)\sin\theta\right]V$$

On déduit le couple moteur, avec $\Gamma = \dot{V}$:

$$\boxed{C = 4R\left[\left(m + \frac{21}{16}M + \frac{I}{16R^2}\right)\Gamma + F + g\left(m + \frac{7}{4}M\right)\sin\theta\right]}$$