INSTITUT PREPARATOIRE AUX ETUDES D'INGENIEUR SFAX
Département de la Préparation Mathématiques Physique

PC 2 - PT 2
30 Avril 2018

Devoir de Synthèse

Mathématiques

Durée : 2 heures

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. (a) Montrer que f est continue en $(0,0)$.
   (b) Déterminer les dérivées partielles de f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
   (c) Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}((0,0))$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}((0,0))$.
   (d) Montrer que f est C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que
   (x,y) est un point critique de $f \iff (x,y) = (0,0)$ ou $x^2+y^2 = 1$.
3. (a) Justifier que f présente un minimum global au point $(0,0)$.
   (b) Soit $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x_0^2+y_0^2 = 1$.
      i. Donner le tableau de variations de la fonction $g : t \longmapsto \dfrac{e^{-\frac{1}{t}}}{t}$ sur $]0,+\infty[$.
      ii. En déduire que f présente un maximum global au point (x_0,y_0).

Exercice 2

Soit $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la famille des polynômes définie par:
$H_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_{n+1} = XH_n - H_n'$.

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est un polynôme unitaire de degré n.
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_{n+1}' = (n+1)H_n$.
   Pour tous polynômes P et Q à coefficients réels, on pose
   $$\langle P \mid Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)f(x)dx,$$
   la fonction f étant définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$.

On admet que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

3. (a) Justifier, pour tous polynômes P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, l'existence de l'intégrale qui définit $\langle P \mid Q \rangle$.

   (b) Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Dans la suite, $\mathbb{R}[X]$ est muni de ce produit scalaire et de la norme associée notée $\|.\|$.

4. (a) Démontrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\langle P \mid H_n \rangle = \langle P^{(n)} \mid H_0 \rangle$.

   (b) En déduire que , pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(H_0, H_1, \ldots, H_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

   (c) Calculer $\|H_n\|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (d) Soit $P = X^3 + X^2 + X + 1$. Préciser les polynômes H_1, H_2 et H_3 puis déterminer quatre réels a_i $(0 \leq i \leq 3)$ tels que $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{3} a_i H_i$. En déduire la distance d du polynôme P au sous-espace $\mathbb{R}_0[X]$ des polynômes constants.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note p le nombre de racines réelles (distinctes) d'ordre impair du polynôme H_n, $a_1, a_2, \ldots, a_p$ ses racines et S le polynôme défini par

$$S = 1 \text{ si } p = 0 \quad \text{et} \quad S = \prod_{i=1}^{p}(X - a_i) \text{ sinon.}$$

5. (a) Démontrer que, si $p < n$, alors $\langle S \mid H_n \rangle = 0$.

   (b) Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S(x)H_n(x) \geq 0$.

   (c) En déduire que H_n possède n racines réelles distinctes.