– Correction du devoir de Contrôle N°2 –

PC2. PT2

2018

Problème 1:

Partie 1:

1. $X(\Omega) = \mathbb{N}$

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X=i) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}((X=i)\cap(Y=j))$$
$$= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{e\, 2^{i+1}\, j!}$$
$$= \frac{1}{e\, 2^{i+1}} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} = \frac{e}{e\, 2^{i+1}} = \frac{1}{2^{i+1}}$$

$Y(\Omega) = \mathbb{N}$

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(Y=j) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}((X=i)\cap(Y=j))$$
$$= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{e\, 2^{i+1}\, j!} = \frac{1}{2e\, j!} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^i}$$
$$= \frac{1}{2e\, j!} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{e\, j!}$$

Remarque: On sait que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \forall x \in]-1,1[$.

2.a). Notons $Z = 1 + X$.

$Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(Z=k) = \mathbb{P}(X=k-1) = \frac{1}{2^k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \times \frac{1}{2}$$

D'où $Z \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$.

On a $\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{p}$, ici $p = \frac{1}{2}$

$= 2$

or $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(1+X) = 1 + \mathbb{E}(X) \Rightarrow \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Z) - 1 = 1$.

$V(Z) = \frac{q}{p^2}$, ici $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$$= \frac{1/2}{(1/2)^2} = 2$$

D'autre part, $V(Z) = V(1+X) = V(X)$

D'où $V(X) = 2$.

(b). $E(Y) = \sum_{j=0}^{+\infty} j\, \mathbb{P}(Y=j)$

$$= \sum_{j=0}^{+\infty} j \frac{1}{e\, j!} = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{j}{e\, j!}$$

$$= \frac{1}{e} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{(j-1)!} = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = 1$$

$$V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2$$

$$E(Y^2) = \sum_{j=0}^{+\infty} j^2\, \mathbb{P}(Y=j)$$

$$= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{j^2}{e\, j!} = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{j}{e(j-1)!}$$

$$= \frac{1}{e} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{j}{(j-1)!} = \frac{1}{e} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{j-1+1}{(j-1)!} = \frac{1}{e}\left[\sum_{j=2}^{+\infty} \frac{j-1}{(j-1)!} + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{(j-1)!}\right]$$

$$= \frac{1}{e}(e+e) = 2$$

$V(Y) = 2 - 1^2 = 1$.

3). On a $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbb{P}((X=i) \cap (Y=j)) = \frac{1}{e\, 2^{i+1}\, j!}$

$$\mathbb{P}(X=i) = \frac{1}{2^{i+1}}$$

$$\mathbb{P}(Y=j) = \frac{1}{e\, j!}$$

Comme $\mathbb{P}((X=i) \cap (Y=j)) = \mathbb{P}(X=i) \times \mathbb{P}(Y=j)$ $\forall (i,j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$

donc les v.a. X et Y sont indépendantes.

4). $\mathbb{P}(X=Y) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} (X=i \cap Y=i)\right)$

$= \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=i \cap Y=i)$ car les évenements $(X=i \cap Y=i)_{i \in \mathbb{N}}$ sont 2 à 2 indépendants.

$$\mathbb{P}(X=Y)=\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{e\,2^{i+1}\,i!}$$

$$=\frac{1}{2e}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{(1/2)^i}{i!}=\frac{1}{2e}e^{1/2}=\frac{1}{2\sqrt{e}}.$$

Partie II :

1). $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

$$\mathbb{P}(X=k\mid Y=n)=\begin{cases} C_n^k\, p^k (1-p)^{n-k} & \forall\ 0\leqslant k\leqslant n.\\ 0 & \forall\ k>n.\end{cases}$$

On sait que $(X=k)=(X=k)\cap\Omega$

$$=(X=k)\cap\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(Y=n)\Big)$$

$$=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\big((X=k)\cap(Y=n)\big)$$

Soit $k\in\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X=k)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}\big((X=k)\cap(Y=n)\big)$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k\mid Y=n)\,\mathbb{P}(Y=n)$$

$$=\sum_{n=0}^{k-1}\mathbb{P}(X=k\mid Y=n).\mathbb{P}(Y=n)+\sum_{n=k}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k\mid Y=n)\,\mathbb{P}(Y=n)$$

$$=0+\sum_{n=k}^{+\infty}C_n^k\,p^k(1-p)^{n-k}\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$$

$$=\frac{p^k}{(1-p)^k}e^{-\lambda}\sum_{n=k}^{+\infty}C_n^k\frac{(1-p)^n.\lambda^n}{n!}$$

or $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

Donc $\mathbb{P}(X=k)=\dfrac{p^k}{(1-p)^k}\dfrac{e^{-\lambda}}{k!}\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{((1-p)\lambda)^n}{(n-k)!}$

Posons le changement d'indice : $i=n-k$

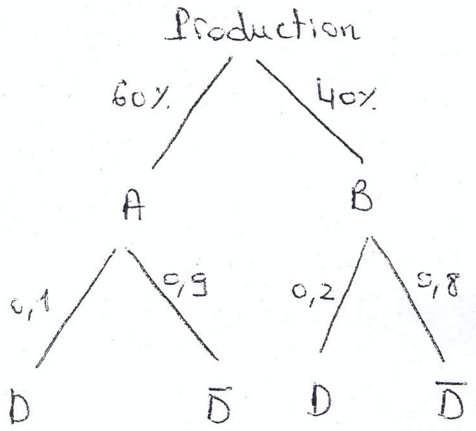
On aura $\mathbb{P}(X=k)=\left(\dfrac{p}{1-p}\right)^k\dfrac{e^{-\lambda}}{k!}\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{[(1-p)\lambda]^{i+k}}{i!}$

$$=\frac{p^k.\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{[(1-p)\lambda]^i}{i!}=\frac{(p\lambda)^k}{k!}e^{-\lambda}.e^{(1-p)\lambda}$$

Ainsi $\mathbb{P}(X=k) = \dfrac{(p\lambda)^k}{k!} e^{-p\lambda}$

Par suite $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(p\lambda)$.

2)



(a). $\mathbb{P}(A \mid D) = \dfrac{\mathbb{P}(D \mid A) \cdot \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(D)}$ d'après la formule d'inversion.

or $D = \underbrace{(D \cap A) \cup (D \cap B)}_{\text{disjoints}}$

d'où $\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(D \cap A) + \mathbb{P}(D \cap B)$

$= \mathbb{P}(D \mid A) \cdot \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(D \mid B) \cdot \mathbb{P}(B)$

$= 0,1 \times 0,6 + 0,2 \times 0,4$

$= 0,14.$

Ainsi $\mathbb{P}(A \mid D) = \dfrac{0,1 \times 0,6}{0,14} = 0,428$

(b). (i). $Y(\Omega) = \mathbb{N}$

$\forall k \in \mathbb{N}, \ \mathbb{P}(Y=k) = e^{-\lambda} \cdot \dfrac{\lambda^k}{k!} = e^{-20} \dfrac{(20)^k}{k!}$

$E(Y) = V(Y) = \lambda = 20.$

(ii). 1^{er} cas : si $k > n$:

$\mathbb{P}(X=k \mid Y=n) = 0$ car c'est un évènement impossible. puisque le nbre d'objets défectueux est toujours inférieur au nbre d'objets produits.

$2^{ème}$ cas : si $k \leqslant n$:

$\mathbb{P}(X=k \mid Y=n) = C_n^k \, p^k (1-p)^{n-k}$ avec $p = \mathbb{P}(D \mid A) = 0,1.$

car la loi de X sachant que $(Y=n)$ est une loi binomiale de paramètres n, $p = \mathbb{P}(D \mid A) = 0,1.$

. Ainsi $\begin{cases} \mathbb{P}(X=k \mid Y=n) = C_n^k \,(0{,}1)^k\,(0{,}9)^{n-k} & \forall\ k \leq n. \\ \mathbb{P}(X=k \mid Y=n) = 0 & \forall\ k > n. \end{cases}$

(iii). $\left.\begin{array}{l} \text{On a, } Y \rightsquigarrow \mathcal{P}(20) \\ \text{la loi de } X \text{ conditionnée par } (Y=n) \\ \text{est } \mathcal{B}(n, p) \text{ avec } p = 0{,}1 \end{array}\right\} \underset{1.}{\overset{\text{Question}}{\Longrightarrow}} X \rightsquigarrow \mathcal{P}(p\lambda) = \mathcal{P}(0{,}1 \times 20) = \mathcal{P}(2).$

Problème 2:

1. (a). Soit $x \in \mathbb{R}$,

$\forall n \geq 1, \quad \left| \dfrac{\sin(nx)}{n^3} \right| \leq \left(\dfrac{1}{n^3}\right).$ TG d'une série convergente car $\alpha = 3 > 1$

donc $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n^3}$ converge, $\forall x \in \mathbb{R}$

Ainsi $D_f = \mathbb{R}$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$, $2\pi + x \in \mathbb{R}$

$$f(2\pi + x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n(x+2\pi))}{n^3}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx + 2n\pi)}{n^3}$$ or $x \mapsto \sin x$ est 2π périodique

donc $f(x+2\pi) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, parsuite f est 2π-périodique.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^3}$.

On a $\forall n \geq 1$, $x \mapsto f_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \geq 1$ $\quad |f_n(x)| \leq \left(\dfrac{1}{n^3}\right)$ indép. de x. TG d'une série cv.

D'où, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ cv. normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

Parsuite, $f = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est continue sur $\mathbb{R}$.

(c). $\forall n \geq 1$, $x \mapsto f_n(x)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $f_n'(x) = \dfrac{n\cos(nx)}{n^3} = \dfrac{\cos(nx)}{n^2}$

$\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ cv. simplement sur $\mathbb{R}$ d'après 1.(a).

et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \geq 1$ $\quad |f_n'(x)| \leq \dfrac{1}{n^2}$, donc $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n'$ cv. norm. de unif. sur $\mathbb{R}$.

Parsuite $f \in C^1(\mathbb{R})$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

(2). (a). Soit $u \in \mathbb{R}^*$, on pose $g_n(u) = \frac{u^n}{n^3}$.

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{g_{n+1}(u)}{g_n(u)} \right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{u^{n+1}}{(n+1)^3} \cdot \frac{n^3}{u^n} \right|$$

$$= |u| \quad \text{car } n^3 \underset{+\infty}{\sim} (n+1)^3$$

D'après le critère de D'Alembert des séries numériques,

si $\begin{cases} |u| < 1 \Rightarrow \sum_{n \geq 1} g_n \text{ cv. absolument} \\ |u| > 1 \Rightarrow \sum_{n \geq 1} g_n \text{ dv. trivialement} \end{cases}$

Ainsi $R_{cv}\left(\sum_{n \geq 1} \frac{u^n}{n^3}\right) = 1$.

(b). $\sum_{n \geq 1} \frac{u^n}{n^3}$ est une série entière de rayon $R = 1 > 0$, donc sa somme S est de classe C^∞ sur $]-1,1[$.

(c). i). Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(t) = t^2 e^{-nt}$ $\forall t \in [0,+\infty[$.

Pour mq $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bien définie, il suffit de mq $\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$ cv.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n \in CM([0,+\infty[, \mathbb{R}_+)$.

Au $\mathcal{V}(+\infty)$: $\lim_{t \to +\infty} t^2 \cdot f_n(t) = 0 \Rightarrow f_n(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

or $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable au $\mathcal{V}(+\infty)$

car $\alpha = 2 > 1$

donc f_n est intégrable au $\mathcal{V}(+\infty)$

Parsuite $\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$ cv.

(ii). Pour le calcul de I_n, on va procéder par 2 IPP.

• On pose $u(t) = t^2$ $\longrightarrow$ $u'(t) = 2t$

$v'(t) = e^{-nt}$ $\qquad v(t) = \dfrac{e^{-nt}}{-n}$

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-nt}\,dt = \left[\cancel{t^2 \times \frac{-e^{-nt}}{n}}\right]_0^{+\infty} + \frac{2}{n}\int_0^{+\infty} t\, e^{-nt}\,dt$$

car $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 e^{-nt} = 0.$

$$\Rightarrow I_n = \frac{2}{n}\int_0^{+\infty} t\, e^{-nt}\,dt$$

$u_1(t) = t$ $\longrightarrow$ $u_1'(t) = 1$

$v_1'(t) = e^{-nt}$ $\qquad v_1(t) = \dfrac{-e^{-nt}}{n}$

$$\int_0^{+\infty} t\, e^{-nt}\,dt = \left[\cancel{\frac{-t}{n} e^{-nt}}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} e^{-nt}\,dt$$

car $\lim\limits_{t\to+\infty} t\, e^{-nt} = 0$

On aura, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\, e^{-nt}\,dt = \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} e^{-nt}\,dt = \frac{1}{n}\left[\frac{-e^{-nt}}{n}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{n^2}$

Ainsi $I_n = \dfrac{2}{n} \times \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{2}{n^3}$ $\quad \forall n \geq 1.$

(d). Soit $u \in]-1,1[$, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{u t^2}{e^t - u}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{u t^2}{e^t(1 - u e^{-t})}\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{u t^2}{e^t} \sum_{n=0}^{+\infty} (u e^{-t})^n\,dt$$ car $|u e^{-t}| < 1$. $\forall u \in]-1,1[$ et $t \in \mathbb{R}_+$

$$= \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u^{n+1} (e^{-t})^{n+1} \cdot t^2\,dt$$

on pose $f_n(t) = u^{n+1} e^{-(n+1)t}\, t^2$, $\quad n \geq 0$ et $t \geq 0$.

• $\forall n \geq 0$, $f_n \in CM([0,+\infty[)$ et intégrable sur $[0,+\infty[$

car, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 f_n(t) = 0 \Rightarrow f_n(t) = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$

• $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ cv. simp. sur $\mathbb{R}$ car $\sum\limits_{n\geq 0} f_n(t) = t^2 \underbrace{\sum_{n\geq 0} (u e^{-t})^{n+1}}_{\text{série géométrique de raison } u e^{-t};\ |u e^{-t}| < 1\ \forall t \geq 0.}$

• $\forall t \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) = t^2 \sum_{n=0}^{+\infty} (u e^{-t})^{n+1} = t^2 \sum_{k=1}^{+\infty} (u e^{-t})^k$

$= t^2 . u e^{-t} \times \frac{1}{1 - u e^{-t}}$

$= \frac{u t^2}{e^t - u}$

$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \in CM([0,+\infty[)$

• $\sum_{n \geq 0} \int_0^{+\infty} |f_n(t)| \, dt$ cv ?

On a $\int_0^{+\infty} |f_n(t)| \, dt = \int_0^{+\infty} |u|^{n+1} t^2 e^{-(n+1)t} \, dt = |u|^{n+1} I_{n+1}$

$= \frac{2|u|^{n+1}}{(n+1)^3}$

$\forall u \in]-1,1[, \quad \frac{2|u|^{n+1}}{(n+1)^3} \leqslant \left(\frac{2}{n^3}\right)$ TG d'une série cv car $\alpha = 3 > 1$

D'après le critère de comparaison des séries à termes positifs, on obtient que $\sum_{n \geq 0} \frac{2|u|^{n+1}}{(n+1)^3}$ cv

Du coup, $\sum_{n \geq 0} \int_0^{+\infty} |f_n(t)| \, dt$ cv

En appliquant le TIT, on peut donc permuter somme et intégrale pour avoir $\int_0^{+\infty} \frac{u t^2}{e^t - u} \, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) \, dt$

$= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u^{n+1} e^{-(n+1)t} t^2 \, dt$

$= \sum_{n=0}^{+\infty} u^{n+1} . I_{n+1}$

$= 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^{n+1}}{(n+1)^3}$

$= 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{u^k}{k^3} = 2 S(u)$

(e). On a $S(e^{ix}) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{e^{ix}\, t^2}{e^t - e^{ix}}\, dt \quad \forall x \in]0, 2\pi[$.

or $S(e^{ix}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{n^3}$

$$\mathrm{Im}\left(S(e^{ix})\right) = \mathrm{Im}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{n^3}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{Im}\left(\frac{e^{inx}}{n^3}\right) \quad \text{car } \sum_{n\geq 1} \frac{e^{inx}}{n^3} \text{ cv. abs sur }]0,2\pi[$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3} = f(x).$$

Cherchons donc $\mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{ix}\, t^2}{e^t - e^{ix}}\, dt\right)$.

Comme $t \overset{g(t)}{\longmapsto} \left|\frac{e^{ix}\, t^2}{e^t - e^{ix}}\right| = \frac{t^2}{\sqrt{e^{2t}+1-2e^t\cos x}}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$

car $\begin{cases} \left(e^{2t}+1-2e^t\cos x\right)^{1/2} \underset{+\infty}{\sim} \left(e^{2t}\right)^{1/2} = e^t \\ g(t) \underset{+\infty}{\sim} t^2 e^{-t}, \quad \lim_{t\to+\infty} t^2 g(t) = 0. \end{cases}$

D'où $\mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{ix}\, t^2}{e^t - e^{ix}}\, dt\right) = \int_0^{+\infty} \mathrm{Im}\left(\frac{e^{ix}\, t^2}{e^t - e^{ix}}\right) dt$

$$= \int_0^{+\infty} t^2\, \mathrm{Im}\left(\frac{e^{ix}}{e^t - e^{ix}}\right) dt$$

or $\frac{e^{ix}}{e^t - e^{ix}} = \frac{e^{ix}\,(e^t - e^{-ix})}{(e^t - e^{ix})(e^t - e^{-ix})} = \frac{e^{ix}e^t - 1}{|e^t - e^{ix}|^2} = \frac{e^{ix}e^t - 1}{e^{2t}+1-2\cos x\, e^t}$

donc $\mathrm{Im}\left(\frac{e^{ix}}{e^t - e^{ix}}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{e^t(\cos x + i\sin x) - 1}{e^{2t}+1-2\cos x\, e^t}\right)$

$$= \frac{e^t \sin x}{e^{2t}+1-2\cos x\, e^t}$$

Parsuite $f(x) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{e^t \sin x \times t^2}{e^{2t}+1-2\cos x\, e^t}\, dt \overset{(*)}{=} \frac{\sin x}{2}\int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^t}{e^{2t}+1-2\cos x \cdot e^t}\, dt$

D'autre part, $\frac{1}{\operatorname{ch} t - \cos x} = \frac{1}{\frac{e^t + e^{-t}}{2} - \cos x} = \frac{2}{e^t + e^{-t} - 2\cos x}$

$$= \frac{2\, e^t}{e^{2t} + 1 - 2\, e^t \cos x}$$

Parsuite $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{\operatorname{ch}t - \cos x}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{2t^2 e^t}{e^{2t}+1-2\cos x \times e^t}\,dt$

$= 2 \cdot \dfrac{2f(x)}{\sin x}$ d'après (*)

$= \dfrac{4f(x)}{\sin x}.$

Ainsi on aura, $\forall x \in]0, 2\pi[$, $f(x) = \dfrac{\sin x}{4}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{\operatorname{ch}t - \cos x}\,dt.$

3). (a). Soit $x \in]0, 2\pi[$,

$t \mapsto w(t,x) = \dfrac{t^2}{\operatorname{ch}t - \cos x} \in CM([0,+\infty[, \overset{??}{\mathbb{R}_+})$ car

$\begin{cases} -1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant \operatorname{ch}t - 1 \leqslant \operatorname{ch}t - \cos x \leqslant \operatorname{ch}t + 1 \end{cases}$

Au $V(+\infty)$ $\quad w(t,x) \leqslant \dfrac{t^2}{\operatorname{ch}t - 1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{t^2}{e^t}$

or $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2 \times t^2 e^{-t} = 0 \Rightarrow t \mapsto \frac{t^2}{\operatorname{ch}t-1}$ est intég. au $V(+\infty)$

D'où $t \mapsto w(t,x)$ est intég. sur $[0,+\infty[$.

) $\forall t \in [0,+\infty[$ $\quad x \mapsto w(t,x)$ est continue sur $]0, 2\pi[$

$\forall x \in]0, 2\pi[$ $\quad t \mapsto w(t,x) \in CM([0,+\infty[)$

$\forall t \in]0,+\infty[$ $\forall x \in]0, 2\pi[$; $0 \leqslant w(t,x) \leqslant \dfrac{t^2}{\operatorname{ch}t - 1}$

pour $t = 0$ $\quad w(0,x) = 0 \leqslant 2.$

d'où $\forall t \in [0,+\infty[$ $\forall x \in]0, 2\pi[$ $\quad |w(t,x)| \leqslant \varphi(t)$

où $\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{t^2}{\operatorname{ch}t - 1} & \text{si } t \in]0,+\infty[\\ 2 & \text{si } t = 0. \end{cases}$

on a : φ est continue positive sur $\mathbb{R}^+$ integrable sur $\mathbb{R}^+$

en effet

au V_0 $\quad \displaystyle\lim_{t\to 0} \varphi(t) = 2 = \varphi(0)$ $\qquad \varphi(t) \underset{0}{\sim} 2$ integ au V_0.

au $V_{+\infty}$ $\quad \displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2 \varphi(t) = 0$ $\qquad \Rightarrow \varphi(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ or $\dfrac{1}{t^2}$ integ au $V_{+\infty}$

donc Ψ est cont sur sur $]0, 2\pi[$