UNIVERSITÉ DE SFAX

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieurs de Sfax

Année universitaire : 2018/2019

Devoir de Contrôle d'Analyse
P.T.2

Durée : 1 heure 30 mn **Date : 30 Octobre 2018**

Exercice

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose

$$N_a(P) = |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)|dt.$$

1. Démontrer que N_a est une norme sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soient $(a, b) \in [0, 1]^2$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$.
   (a) Montrer que
   $$|P(b)| \leq |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)|dt.$$
   (Indication : On pourra utiliser l'égalité $P(b) - P(a) = \int_a^b P'(t)dt$).
   (b) En déduire que
   $$\frac{1}{2}N_a(P) \leq N_b(P) \leq 2N_a(P).$$
3. Soit $a \in [0, 1]$. On considère l'application :
   $$\begin{array}{rccl} f : & (\mathbb{R}_n[X], N_a) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, |\,.\,|) \\ & P & \longmapsto & P(0) - \int_0^1 tP'(t)dt \end{array}$$
   (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Prouver que :
   $$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad |f(P)| \leq 2N_a(P).$$
   (c) Vérifier que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a : $f(P) = P(0) - P(1) + \int_0^1 P(t)dt$.
   (d) Déduire que l'ensemble
   $$F = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X]; \int_0^1 P(t)dt = \int_0^1 P'(t)dt \right\}$$
   est un fermé de $\mathbb{R}_n[X]$.

Problème

On se propose d'étudier l'intégrale $\displaystyle\int_{]0,+\infty[} \frac{\sin(t)}{t}dt$.

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}dt$ est convergente.

2. (a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{t}dt.$$

   (b) Déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ est convergente et que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nt)}{t^2}dt$.

   (a) Justifier l'existence de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} I_n.$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nt)}{\sin^2(t)}dt$.

   (a) Montrer que A_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Calculer A_0 et A_1.

   (c) En utilisant la relation suivante : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\sin^2(nt) - 2\sin^2((n+1)t) + \sin^2((n+2)t) = 2\sin^2(t)\cos((2n+2)t),$$

   montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n - 2A_{n+1} + A_{n+2} = 0$.

   (d) Conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = n\dfrac{\pi}{2}$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $B_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nt)}{\tan^2(t)}dt$.

   (a) Justifier l'existence de B_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n - B_n = \dfrac{\pi}{4}$.

   (c) Montrer que : $\forall x \in [0, \dfrac{\pi}{2}[$, $\quad \sin(x) \le x \le \tan(x)$.

   (d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad B_n \le I_n \le A_n$.

6. Montrer alors que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}.$$