UNIVERSITÉ DE SFAX — Année universitaire : 2018/2019

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieurs de Sfax

Examen d'Algèbre - Semèstre N°1
Sections : P.C.2 et P.T.2

Durée : 2h	Date : 10 Décembre 2018	Nbre de pages : 3

Soit E un $\mathbb{K}$−espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout entier $r \geq 1$, on note

$$J_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K}). \text{ Ainsi, } J_1 = (0),\ J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Un endomorphisme f de E est dit nilpotent s'il existe $m \geq 1$ tel que

$$f^m = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{m-\text{fois le } f} = \widetilde{0}, \text{ l'endomorphisme nul de } E.$$

- Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite nilpotente s'il existe $m \geq 1$ tel que $A^m = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Partie I/ Indice de nilpotence

Soit f un endomorphisme nilpotent de E et soit $p = \min\{m \in \mathbb{N}, f^m = \widetilde{0}\}$.

1. $a)$ Vérifier que pour tout $k \geq p$, $f^k = \widetilde{0}$.

   $b)$ Déduire qu'il existe $x \in E$ tel que, $f^{p-1}(x) \neq 0_E$.

   L'entier p sera dit l'indice de nilpotence de f, ou f est nilpotente d'indice p.

2. Soit $a \in E$ tel que $f^{p-1}(a) \neq 0_E$ et soit $\alpha_0, ..., \alpha_{p-1} \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\alpha_0 a + \alpha_1 f(a) + ... + \alpha_{p-1} f^{p-1}(a) = 0_E. \quad (*)$$

   $a)$ Montrer que $\alpha_0 f^{p-1}(a) = 0_E$. [indication : appliquer f^{p-1} à l'équation $(*)$]

   $b)$ Déduire que $\left(f^{p-1}(a), ..., f(a), a\right)$ est libre.

   $c)$ Justifier que $p \leq n$.

3. **Noyaux itérés de f.**

   $a)$ Que dire de f si son indice de nilpotence $p = 1$?

   $b)$ Montrer que pour tout endomorphisme g de E, si $\ker(g) = \{0_E\}$ alors g n'est pas nilpotent.

   $c)$ Justifier que si f est nilpotent d'indice 2, alors $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)$.

$d)$ On suppose que f est nilpotent d'indice $p \geq 2$

$i-$ Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\ker(f^i) \subset \ker(f^{i+1})$.

$ii-$ Montrer que si $\ker(f^i) = \ker(f^{i+1})$, alors $i \geq p$.

$iii-$ Montrer que pour tout $i < p$, il existe $x \in \ker(f^{i+1})$ tel que $x \notin \ker(f^i)$.

4. **Eléments propres de f.**

Soit f un endomorphisme nilpotent de E d'indice p et A la matrice de f dans une base de E.

$a)$ Soit $\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A)$, V un vecteur propre de A associé à λ. Exprimer A^kV en fonction de λ et V.

$b)$ Déduire que $Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{0\}$.

$c)$ f est-il diagonalisable ?

$d)$ Donner dét(f), tr(f) et $\mathcal{X}_f$ le polynôme caractéristique de f.

$e)$ f est-il trigonalisable ?

Partie II/ Etude en dimension 3

Dans cette partie E est de dimension 3.

1. Soit f un endomorphisme nilpotent de E d'indice $p = 3$.

$a)$ Justifier qu'il existe $x \in E$ tel que $\mathcal{B}_1 = \big(f^2(x), f(x), x\big)$ est une base de E.

$b)$ Ecrire la matrice de f dans $\mathcal{B}_1$.

2. Soit f un endomorphisme nilpotent de E d'indice $p = 2$.

$a)$ Justifier que $\ker(f) \neq \{0_E\}$.

$b)$ Soit $a \in E$ tel que $\big(f(a), a\big)$ est libre.

$i-)$ Montrer que $rg(f) = 1$. [indication : Théorème du rang et **I**$-3-c)$]

$ii-)$ Montrer qu'il existe $b \in \ker(f)$ tel que $\mathcal{B}_2 = \big(b, f(a), a\big)$ est une base de E.

$iii-)$ Ecrire la matrice de f dans $\mathcal{B}_2$.

3. **Application**

Soit f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -3 \\ -5 & 1 & -6 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$a)$ Montrer que f est nilpotent d'indice 3.

$b)$ Trouver un vecteur $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $f^2(x) \neq 0$

$c)$ Justifier que A est semblable à la matrice J_3 et donner une matrice de passage P.

Partie III/ Réduction d'un endomorphisme nilpotent.

Dans cette partie E est un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, f un endomorphisme nilpotent de E d'indice $p \geq 1$.

1. Soit $x \in E$, montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^k(x) = 0_E$.
   On note $p_x = \min\{k \in \mathbb{N}, f^k(x) = 0_E\}$ et $G_x = \text{vect}\{f^{p_x}(x), ..., f(x), x\}$.

2. $a)$ Justifier que pour tout $x \in E$, $x \in \ker(f^{p_x})$ et $x \notin \ker(f^{p_x-1})$.
   $b)$ Déduire la dimension de G_x.
   $c)$ Justifier que G_x est stable par f et donner $G_x \cap \ker(f)$.
   $d)$ Donner la matrice de l'endomorphisme induit $f_{/G_x}$.

3. Par récurrence sur l'indice de nilpotence p de f, on se propose de montrer qu'il existe $x_1, ..., x_r$ dans E telles que

$$E = G_{x_1} \oplus ... \oplus G_{x_r}.$$

   $a)$ Que vaut G_x si $x \in \ker(f)$?
   $b)$ Justifier le résultat pour $p = 1$.
   $c)$ On suppose le résultat est vrai pour tout endomorphisme nilpotent de E d'indice $p-1$ et soit f un endomorphisme nilpotent de E d'indice p.
   $i-)$ Justifier que f induit un endomorphime sur $\text{Im}(f)$.
   $ii-)$ Quel est l'indice de $f_{/\text{Im}(f)}$?
   En utilisant l'hypothèse de récurrence il existe $y_1, ..., y_s \in E$ tels que

$$Im(f) = G_{y_1} \oplus ... \oplus G_{y_s}.$$

   $d)$ $i-)$ Montrer que pour tout $i \in \{1, ..., s\}$, il existe $x_i \in E$ tel que $f(x_i) = y_i$.
   $ii-)$ pour tout $i \in \{1, ..., s\}$, donner une base de G_{x_i}, en déduire qu'on a une somme directe $G_{x_1} \oplus ... \oplus G_{x_s}$.
   $iii-)$ On suppose que $\dim(E) \neq \sum_{i=1}^{s} \dim(G_{x_i})$. Montrer qu'il existe $x_{s+1}, ..., x_r$ tels que $G_{x_k} = \text{vect}\{x_k\}$, pour tout $k \in \{s+1, ..., r\}$
   $iv-)$ Justifier que la matrice de f est semblable à la matrice diagonale par blocs :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & J_{p_{x_1}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{p_{x_s}} \end{pmatrix}.$$