

CORRIGE de L'EXAMEN DE PHYSIQUE

– Semestre 1 – MP 2 / T 2.

Décembre 2018

Barème (Total / 80)

<u>Question n°</u>	<u>Valeur</u>
1, 31,75 et 77	<u>2 pts</u>
39, 41,53, 54, 60,61, 62,64, 80 et 81	<u>0.5 pt</u>
Le reste	<u>1 pt</u>

I-A-1- Le modèle du conducteur parfait consiste à faire tendre la conductivité γ vers l'infini. Cela implique $E = 0, J = 0, \rho = 0$ en tout point du volume du conducteur. On a également $B = 0$ en tout point du volume, si B est variable.

2- Le système de charge est invariant par rapport une rotation d'axe Oz et par rapport à une translation d'axe Oz (on néglige les effets de bords), donc $E(M) = E(r)$ de même pour V . Les surfaces équipotentiels sont des cylindres alors \vec{E} est radial.

3- $\Delta V = 0$ donne $\frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) = 0 \rightarrow r \frac{dV}{dr} = \alpha_1 \rightarrow V(r) = \alpha_1 \ln(r) + \alpha_2$

4- $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V = -\frac{\alpha_1}{r} \vec{u}_r$

5- La surface de Gauss est un cylindre d'axe (Oz), de rayon r , et de longueur l .

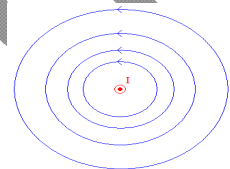
$\oiint \vec{E} d\vec{S} = \iint -\frac{\alpha_1}{r} \vec{u}_r r d\theta dz \vec{u}_r = \frac{Q}{\epsilon_0}$. Ce qui donne $\alpha_1 = -\frac{Q}{2\pi l \epsilon_0}$

6- $V_1 - V_2 = V(r = a) - V(r = b) = \frac{Q}{2\pi l \epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \rightarrow \Gamma = \frac{2\pi \epsilon_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$

I-B-7- Soit un point M de l'espace, le plan (M, axe Oz) est un plan de symétrie pour le système de courants, donc le champ magnétique en M lui est orthogonal. Donc le champ magnétique est ortho radial.

Le système de courants invariant par translation selon Oz, et par rotation d'axe Oz. Donc $B(M) = B(r)$. On applique le théorème d'Ampère sur un cercle de rayon r et d'axe Oz, dans le sens trigonométrique. $\oint \vec{B} r d\theta \vec{u}_\theta = \mu_0 I_0 \rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \vec{u}_\theta$

8- Les lignes de champ sont des cercles d'axe (Oz) plus serrés au voisinage de I_0



9- $\text{div } \vec{B} = 0$ est vérifiée : les lignes de champ sont des courbes fermées.

10- $W_{\text{mag}} = \iiint \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau = \frac{\mu_0}{4\pi} l \ln\left(\frac{b}{a}\right) I_0^2 = \frac{1}{2} l \Lambda I_0^2 \rightarrow \Lambda = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

11- Λ dépend que de la géométrie.

II-A-12- $\text{div } \vec{B} = 0 * \text{div } \vec{E} = 0 * \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} * \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

13- $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \vec{E}) - \Delta \vec{E}$ donne $\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

14- Transverse Electrique Magnétique car \vec{E} et \vec{B} sont perpendiculaires à \vec{k}

15- Propagation sans atténuation (Conducteur parfait) \rightarrow champ indépendant de z

16- $\text{div } \vec{E} = 0 \rightarrow rE(r) = \text{cte} = a E(a^+) = aE_0$ donc $E(r) = E_0 \frac{a}{r}$

17- L'onde est progressive et se propage selon les z croissants. Mais elle n'est pas plane.

18- On injecte la solution $E_0 \frac{a}{r} \exp j(\omega t - kz)$ dans l'équation de propagation :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial r} - \frac{E}{r^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \rightarrow k = \frac{\omega}{c} \text{ milieu non dispersif.}$$

19- $\vec{rot} \vec{E} = \frac{\partial E}{\partial z} \vec{u}_\theta = -jkE \vec{u}_\theta = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -j\omega B \vec{u}_\theta \rightarrow \vec{B} = \frac{E}{c} \vec{u}_\theta$ onde localement plane.

20- $\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2 a^2}{c \mu_0 r^2} \cos^2(\omega t - kz) \vec{u}_z$

21- $\langle P_{ray}(z, t) \rangle = \iint \langle \vec{\Pi} \rangle d\vec{S} = \iint \langle \vec{\Pi} \rangle r dr d\theta \vec{u}_z = \pi \frac{a^2 E_0^2}{c \mu_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

22- Pour $\langle P_{ray}(z, t) \rangle = 10W$, on calcule $E_0 \sim 100kV/m$

23- $v_{énr} = \frac{|\langle \vec{\Pi} \rangle|}{\langle u_{em} \rangle} = c$

II-B-24- Relation de passage ($\vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \vec{u}_r$ et \vec{E}_1 nul). $\sigma(r = a, z, t) = \epsilon_0 E_0 \cos(\omega t - kz)$

25- De même avec $\vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \vec{u}_r$ et \vec{B}_1 nul. $\vec{j}_{s1}(r = a, z, t) = \frac{E_0}{\mu_0 c} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_z$

26- La conservation de la charge est vérifiée à la surface $r = a$: $div \vec{j}_{s1} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0$

27- Pour éliminer l'influence du \vec{E}_{ind} , on fait la circulation de la relation précédente de $r = a$ à $r = b$ à $z = cte$ et $\theta = cte$

$$\underline{u}(z, t) = \underline{V}_1(z, t) - \underline{V}_2(z, t) = \int_{r=a}^{r=b} \vec{E} \cdot d\vec{l} = a E_0 \ln\left(\frac{b}{a}\right) \exp j(\omega t - kz)$$

28- $\underline{i}(z, t) = 2\pi a \vec{j}_{s1} \vec{u}_z = 2\pi a \frac{E_0}{\mu_0 c} \exp j(\omega t - kz)$

29- On remplace ϵ_0 par $\epsilon_r \epsilon_0$, le rapport des deux résultats précédents donne le résultat.

III-A-30- On a négligé l'aspect résistif des matériaux.

31- Loi des nœuds et loi des mailles donnent :

$$i(z + dz, t) - i(z, t) = -\Gamma \frac{\partial u(z, t)}{\partial t} dz \quad \text{et} \quad u(z + dz, t) - u(z, t) = -\Lambda \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} dz$$

Or $h(z + dz, t) - h(z, t) = \frac{\partial h(z, t)}{\partial z} dz$ d'où le résultat demandé.

32- $\frac{\partial}{\partial z}(1)$ et $\frac{\partial}{\partial z}(2)$ on obtient $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Gamma \Lambda \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ et $\frac{\partial^2 i}{\partial z^2} = \Gamma \Lambda \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$ C'est l'équation d'onde

de D'Alembert, la célérité $v = \frac{1}{\sqrt{\Gamma \Lambda}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$. On retrouve la vitesse des ondes électromagnétiques étudiées plus haut, les deux approches décrivent le même phénomène.

III-B-33- La condition aux limites en $z = 0$ s'écrit $u(0, t) = R_L i(0, t)$. On en déduit que la présence d'une seule O.P.P.H. se propageant vers les z croissants seule n'est pas compatible avec cette condition aux limites puisqu'a priori $R_L \neq Z_C$. Il y a donc nécessité d'une onde réfléchie

34- $Z_{c,ref} = -\sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}} = \frac{-1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_r \epsilon_0}} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$ car un signe - apparait dans le calcul de $i(z, t)$

35- $\underline{i}(0, t) = \frac{1}{Z_C} [\underline{U}_{oi} \exp(j\omega t) - \underline{U}_{or} \exp(j\omega t)] = \frac{1}{R_L} (\underline{U}_{oi} + \underline{U}_{or}) \exp(j\omega t)$

D'où $\underline{r}_U = \frac{\underline{U}_{or}}{\underline{U}_{oi}}$ s'écrit $\underline{r}_U = \frac{R_L - Z_C}{R_L + Z_C}$

36- Ce coefficient de réflexion en tension est indépendant de ω , il est donc également valable pour une onde incidente plane progressive (sans être harmonique).

• Il est réel donc les ondes incidentes et réfléchies sont soit en phase (si $r_U > 0$), soit en opposition de phase (si $r_U < 0$).

37- Il y a réflexion totale pour $|r_U| = 1$ c'est-à-dire ici pour les deux cas suivants :

– $r_U = +1$, soit pour $R_L = \infty$ autrement dit pour une extrémité ouverte.

– $r_U = -1$, soit pour $R_L = 0$ autrement dit pour une extrémité en court-circuit.

38- Si $R_L = Z_C$, $r_U = 0$ et la transmission est totale. Ce phénomène s'appelle « l'adaptation d'impédance » et il n'y a pas d'onde réfléchie en $z = 0$.

IV-A-39- La résistance « usuelle » d'un GBF est de 50Ω

40- – le premier pic, sur la voie 1, correspond au pulse produit par le générateur d'impulsions que l'on voit à l'entrée du câble de longueur l . C'est l'onde incidente et son amplitude est 1 V.

– le second pic, sur la voie 2, correspond en partie à ce même pulse à l'extrémité du câble coaxial après avoir parcouru la longueur l . Son amplitude est légèrement inférieure à 2 V. La résistance de l'extrémité étant infinie, il y a réflexion totale et donc le pulse revient ensuite sur ses pas.

– le troisième pic, sur la voie 1, correspond à la partie réfléchie de l'onde initiale ayant parcouru à nouveau la longueur l du câble coaxial et donc une longueur $2l$ par rapport au premier pic. Son amplitude est inférieure à 1 V.

41- Figure 4-c s'identifie à $R_L = \infty$: l'onde réfléchie est en phase avec l'onde incidente. La figure 4-d s'identifie à $R_L = 0$: les deux ondes sont en opposition de phase.

42- Lorsque l'on observe deux pics (pic 1 et pic 2 par exemple), la durée τ qui les séparant correspond au temps que met l'impulsion pour parcourir la distance l avec $\tau = \frac{l}{v} = 2,6 \cdot 200ns = 520 ns$. Alors $v = 1.92 \cdot 10^8 ms^{-1} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$ d'où $\epsilon_r = 2,45$

43- $Z_C \cong 49 \Omega$. Il n'y a pas d'autres pics (pas de réflexion multiple) parce que l'impédance d'entrée du générateur de pulses est 50Ω : il y a alors adaptation d'impédance.

44- $T_a = N T_e = 10 \cdot 200ns = 2\mu s$ donc $F_e = \frac{1}{T_e} = 1GHz$

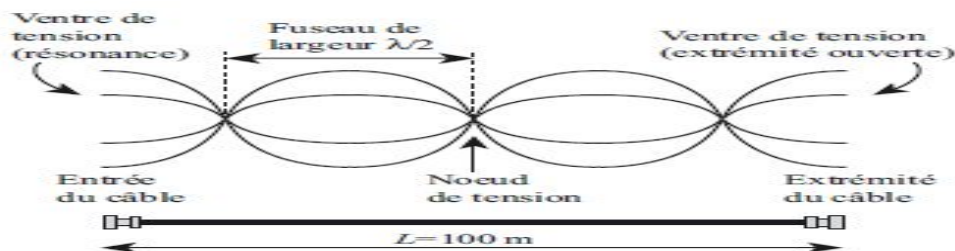
45- $F_e > 2f_{max}$ Condition de Shannon vérifiée.

VI-B-46- Dans cette expérience les conditions correspondant à l'A.R.Q.S. ne sont pas vérifiées, il est donc normal d'observer un déphasage entre les tensions aux deux extrémités du câble. En effet, dans les conditions de l'A.R.Q.S on doit avoir $\lambda = \frac{c}{f} \gg l$ que l'on peut écrire $f \ll \frac{c}{l} \approx 2 MHz$. Cette condition n'est pas satisfaite à 400 kHz.

47- L'onde de tension est la superposition d'une OPPH vers les z croissants et d'une OPPH vers les z décroissants. Les amplitudes de ces deux ondes sont identiques (car $r_U = 1$ d'après ce qui précède) : il s'agit d'ondes stationnaires. Dans ce cas, il y a un nœud de courant (le câble est débranché) et un ventre de tension à l'extrémité du câble. C'est une situation analogue à celle vue en cours : « réflexion d'une onde électromagnétique »

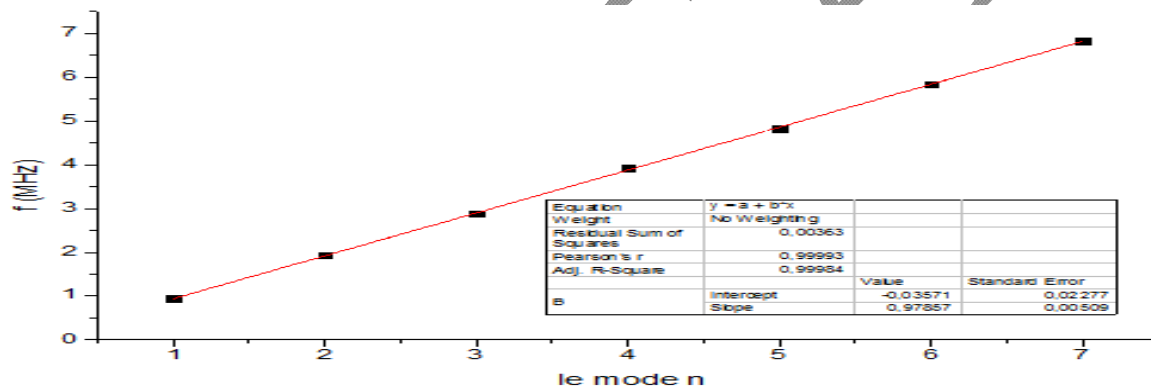
sur un conducteur parfait » où les nœuds du champ électrique correspondent aux ventres du champ magnétique (et inversement). Lorsqu'on observe un maximum de tension à l'entrée du câble (résonance), il y a alors un ventre de tension en ce point.

48-

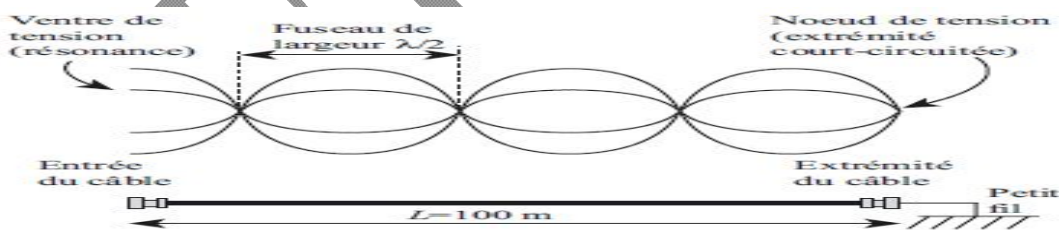


49- On peut également exprimer les fréquences de résonance $f_n = n \frac{v}{2l}$. La célérité est déterminée à partir de la pente de la courbe représentant la fréquence de résonance en fonction du nombre de fuseaux dans le câble.

50- L'équation de la droite est $f_{\text{res}}(\text{en MHz}) \approx 0,978 n$ on trouve $v \approx 1,95 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$. C'est compatible avec la mesure précédente.



51-



52- $l = \frac{\lambda_n}{4} + n \frac{\lambda_n}{2}$

V-A-53- $g = \frac{2\pi\gamma_{iso}}{\ln(\frac{b}{a})} = 5 \cdot 10^{-17} \text{ S/m}$. Il paraît raisonnable de négliger la conductance linéique et l'on considèrera comme un interrupteur ouvert.

54- Loi des mailles : $u(z, t) = u(z + dz, t) + \Lambda \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} dz + \rho dz i(z, t)$. L'équation (2) devient $\frac{\partial u}{\partial z} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t} - \rho i$ et (1) reste inchangée. Puis la démarche de la question 32.

55- La relation de dispersion est $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{v^2} - j\rho\Gamma\omega$

56- Comme $v^2 = \frac{1}{\Gamma\Lambda}$ alors $\underline{k} = \frac{\omega}{v} \left(1 - \frac{j\rho}{\Lambda\omega}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\omega}{v} \left(1 - \frac{j\rho}{2\Lambda\omega} + \frac{1}{8} \left(\frac{\rho}{\Lambda\omega}\right)^2 + \dots\right)$

57- $v_\phi = \frac{\omega}{Re(\underline{k})} = \frac{v}{1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\rho}{\Lambda\omega}\right)^2} \approx v \left(1 - \frac{1}{8} \left(\frac{\rho}{\Lambda\omega}\right)^2\right)$

58- La vitesse de groupe s'obtient en différentiant la relation de dispersion liant $Re(\underline{k})$

et ω , ce qui donne $v_g = \frac{d\omega}{dRe(\underline{k})} = \frac{v}{1 - \frac{1}{8} \left(\frac{\rho}{\Lambda\omega}\right)^2} \approx v \left(1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\rho}{\Lambda\omega}\right)^2\right)$

59- La partie réelle de \underline{k} décrit la propagation alors que la partie imaginaire décrit l'atténuation de l'onde. Le comportement dispersif n'apparaît qu'à l'ordre 2.

Le terme correctif par rapport au cas non dispersif vaut au max 0,125% : la dispersion est extrêmement peu sensible dans le câble. On peut donc négliger la dispersion

60- Le terme d'atténuation est $\exp(-k''z)$. On compare les amplitudes des pulses incident et après un aller-retour par exemple.

$$\exp(-2k''l) = \frac{1.3}{2} \text{ alors } k'' = \frac{1}{200} \ln\left(\frac{1.3}{2}\right) = 2,1 \cdot 10^{-3} m^{-1}$$

61- $\rho = 2k''Z_c = 0,205 \Omega m^{-1}$

62- $R = \rho l = 20,58 \Omega \neq R_{\text{câble}}$ mesurée à fréquence nulle : R varie lorsque f varie.

63- $P(z) = \frac{1}{2} Re \left(\underline{u}(z, t) \underline{i}^*(z, t) \right) = \frac{1}{2} \cos(\varphi) U_0 I_0 e^{-2k''z} = P(z=0) \exp(-2k''z)$

64- $A = \frac{10}{z \ln 10} \cdot \ln \left(\frac{P(z=0)}{P(z)} \right) = \frac{10}{\ln 10} 2k'' = \frac{10}{\ln 10 Z_c} \rho$

65- On a $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{v^2} - j\rho\Gamma\omega = \Gamma\Lambda\omega^2 \left(1 - j\frac{\rho}{\Lambda\omega}\right) \cong -j\rho\Gamma\omega$

$\rightarrow \underline{k} = e^{-\frac{j\pi}{4}} \sqrt{\rho\Gamma\omega} = k' - jk'' \rightarrow A = \frac{10}{\ln 10} 2k'' = \frac{10}{\ln 10} \sqrt{2\rho\Gamma\omega}$

V-B-66- On peut se placer dans l'ARQS magnétique : $\vec{j} \gg \vec{j}_D$ ce qui est acceptable pour des fréquences vérifiant $f \ll \frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0} \sim 10^{18} Hz \rightarrow$ ARQS magnétique est toujours vérifiée dans les bons conducteurs comme le cuivre. Dans la suite, on a $\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\gamma\vec{E}$.

67- $div \vec{E} = \frac{q}{\epsilon_0}$, $\vec{j} = \gamma\vec{E}$ et $\frac{\partial q}{\partial t} + div \vec{j} = 0 \rightarrow \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\gamma}{\epsilon_0} q = 0$ où q est la charge volumique. Soit $q(t) = q(0)e^{-\frac{t}{\tau'}}$ où $\frac{1}{\tau'} = \frac{\gamma}{\epsilon_0} \approx 10^{19} s^{-1}$ alors $q \rightarrow 0$ très rapidement.

68- $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{E}) = \overrightarrow{grad}(div \vec{E}) - \Delta\vec{E}$ donne $\frac{d^2\vec{E}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\vec{E}}{dr} = \frac{2j}{\delta^2} \vec{E}$ où $\delta^2 = \frac{2}{\gamma\omega\mu_0}$.

69- L'équation caractéristique de cette équation a deux racines $p = \pm \frac{1+j}{\delta}$

La solution générale s'écrit plus commodément sous la forme :

$\underline{E}(r) = C_1 \exp\left((1+j)\frac{r-a}{\delta}\right) + C_2 \exp\left(-(1+j)\frac{r-a}{\delta}\right)$. Comme $\delta \ll a$ ceci

conduirait à une divergence du champ \vec{E} si $r \rightarrow 0$. D'où, on doit poser $C_2 = 0$.

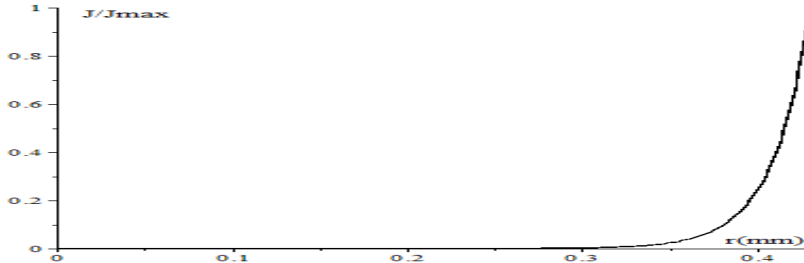
70- On trouve (à 10 MHz) $\delta \approx 21\mu m$, $\frac{a}{\delta} \approx 20$: l'approximation est bien vérifiée.

71- $I_0 = \gamma \iint E(r) r dr d\theta = 2\pi\gamma C_1 \exp\left(-(1+j)\frac{a}{\delta}\right) \int_0^a r \cdot \exp\left((1+j)\frac{r}{\delta}\right) dr$.

L'intégrale est donnée avec $\beta = \frac{(1+j)}{\delta}$ et comme $\delta^2 \ll \delta a$ d'où $\int_0^y x e^{\beta x} dx \approx \frac{y e^{\beta y}}{\beta}$

Alors $C_1 \cong I_0 \frac{1+j}{\gamma 2\pi a \delta}$.

72- $J(r) = \gamma E(r) = J_{max} \exp(\frac{r-a}{\delta})$. Les courants sont majoritairement périphériques.



73- $\langle dP_{ame} \rangle = \iiint \langle \vec{J} \vec{E} \rangle d\tau = \frac{\gamma}{2} \iiint_z^{z+dz} |E(r,t)|^2 r dr d\theta dz' = \frac{\gamma}{2} dz \int_0^a |E|^2 2\pi r dr$
 $= \frac{\gamma}{2} dz e^{-\frac{2a}{\delta}} \int_0^a |C_1|^2 e^{\frac{2r}{\delta}} 2\pi r dr$. L'intégrale est donnée dans l'énoncée avec $\beta = \frac{2}{\delta}$ et
 comme $\delta^2 \ll \delta a$ d'où $\int_0^y x e^{\beta x} dx \approx \frac{y e^{\beta y}}{\beta}$. On obtient $\langle dP_{ame} \rangle = \frac{1}{2} \frac{I_0^2}{\gamma 2\pi a \delta} dz$.

74- $\langle dP_{ame} \rangle = \frac{1}{2} \frac{I_0^2}{\gamma 2\pi a \delta} dz = \frac{1}{2} \rho dz I_0^2$ donc $\rho = \frac{1}{\gamma 2\pi a \delta}$

75- C'est l'effet de peau : tout se passe comme si le courant était uniformément réparti dans une couronne d'épaisseur δ (avec $\delta \ll a$) située au voisinage de la surface du conducteur. Puisque $\delta \propto 1/\sqrt{\omega}$, la résistance linéique augmente avec la racine carrée de fréquence car la section « utile » du fil décroît avec la fréquence.

76- On peut utiliser le calcul effectué à la question **73** et transposer le résultat :

$$\langle dP_J \rangle = \langle dP_{ame} \rangle + \langle dP_{gain} \rangle = \frac{1}{2} \frac{I_0^2(z)}{\gamma 2\pi \delta} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) dz.$$

77- Le bilan énergétique sur la tranche de câble s'écrit :

$$\left\langle \frac{dU_{em}}{dt} \right\rangle = \iint \langle \vec{\Pi}(z, r, t) \rangle dS \vec{u}_z - \iint \langle \vec{\Pi}(z + dz, r, t) \rangle dS \vec{u}_z - \langle dP_J \rangle = 0$$

car $\frac{dU_{em}}{dt} \propto \sin(2\omega t)$ D'où le bilan se limite à $\langle P_{ray}(z, t) \rangle = \langle P_{ray}(z + dz, t) \rangle + \langle dP_J \rangle$

$$\frac{\partial}{\partial z} \langle P_{ray}(z, t) \rangle + \langle dP_J \rangle = 0 \text{ d'où } \frac{dI_0(z)}{dz} + \frac{1}{l_c} I_0(z) = 0 \text{ avec } l_c = \frac{2\delta \gamma}{\epsilon_0 c \sqrt{\epsilon_r}} \frac{\ln(\frac{b}{a})}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

78- C'est la distance caractéristique d'atténuation de l'onde de courant, c'est-à-dire du champ électromagnétique le long du câble. Comme $l_c \propto \delta$: l'atténuation est donc d'autant plus sensible que la fréquence est plus élevée.

Le rapport b/a qui maximise l_c est celui qui maximise la fonction $h(x) = \frac{\ln x}{1+x}$

79- Ceci qui revient à trouver la solution de l'équation $h'(x) = 0 \rightarrow x \ln x = 1 + x$. La solution est $x \approx 3,59$. Les valeurs numériques données correspondent à un rapport $\frac{b}{a} \approx 3,42$. Ce n'est pas si loin. $l_c = 253 \text{ m}$.

80- (+) : offre un débit plus élevé et peu sensible aux perturbations extérieures...

(-) : Support difficile à mettre en place et à raccorder (poids, rigidité...)...

81- Le fibre optique.

Y o B