

<b>Devoir de Synthèse d'Analyse</b> <b>P.T.2</b>
---

<b>Durée : 2 heures</b> <b>Date : 07 Janvier 2020</b>
---

**Exercice**

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $E = R_n[X]$ . Pour tout  $P \in E$ , on pose

$$\|P\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |P(t)|.$$

On considère l'application  $\varphi$  définie sur  $E \times E$  par

$$\varphi(P, Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt, \quad \forall (P, Q) \in E \times E.$$

On considère l'ensemble  $H = \left\{ (P, Q) \in E \times E : P(0) > Q(0) \right\}$ .

1. Montrer que  $\|\cdot\|_\infty$  est une norme sur  $E$ .
2. Vérifier que l'application  $\varphi$  est bien définie.
3. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} N : E &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ P &\longmapsto \sqrt{\varphi(P, P)} \end{aligned}$$

définit une norme sur  $E$ .

4. Pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on pose  $P_k = X^k \in E$  et  $u_k = N(P_k)$ .

(a) Montrer que

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad u_{k+1}^2 = \frac{(2k+1)}{2} u_k^2.$$

(b) En déduire que

$$N(P_n) = \sqrt{\frac{(2n)!}{2^{2n+1}n!}} \sqrt{\pi}.$$

$$\left( \text{On donne } \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right).$$

5. On pose

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (P, Q) &\longmapsto \|P\|_\infty + N(Q). \end{aligned}$$

- (a) Montrer que  $\|\cdot\|$  est une norme sur  $E \times E$ .  
 (b) Montrer que l'application

$$\begin{aligned} f : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) &\longmapsto P(0) - Q(0) \end{aligned}$$

est continue sur  $(E \times E, \|\cdot\|)$ .

(On rappelle que  $E \times E$  est un  $\mathbb{R}$ -ev de dimension  $2n + 2$ ).

- (c) En déduire que  $H$  est un ouvert de  $E \times E$ .  
 (d) Montrer que  $H$  est un ensemble convexe.

6. L'ensemble  $H$  est-il borné?

**Problème**

On pourra utiliser, sans démonstration, l'identité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^x \frac{1}{\operatorname{ch}^2(t)} dt = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}.$$

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'intégrale  $\int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{(\operatorname{ch}(t))^{n+1}} dt$  est convergente.

On pose alors  $a_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(\operatorname{ch}(t))^{n+1}} dt, n \in \mathbb{N}$ .

2. Calculer  $a_0$  et  $a_1$ .  
 3. (a) Montrer que

$$\forall t \geq 0, \quad 1 + \frac{t^2}{2} \leq \operatorname{ch}(t) \leq e^t.$$

- (b) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \geq 0, \quad 1 + \frac{n}{2} t^2 \leq (\operatorname{ch}(t))^n \leq e^{nt}.$$

4. Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{n+1} \leq a_n \leq \frac{\pi}{\sqrt{2(n+1)}}.$$

5. (a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)a_{n+2} = (n+1)a_n.$$

- (b) Déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

(i)  $a_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2}$ .

(ii)  $a_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$ .

6. Quelle est la nature de la série  $\sum_{n \geq 0} a_n$  ?

7. (a) Etudier la monotonie de la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

(b) Dédurre que la série  $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$  est convergente.

On pose  $S = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ .

(a) Montrer que :  $S > 0$ .

(b) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}(t) + 1} dt + (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{1}{(\operatorname{ch}(t))^{n+1} (\operatorname{ch}(t) + 1)} dt.$$

(c) Vérifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{(\operatorname{ch}(t))^{n+1} (\operatorname{ch}(t) + 1)} dt \leq a_n.$$

(d) En déduire que  $S = 1$ .