Examen d'Analyse
P.T.2

Durée : 2 heures

Date : 24 Juillet 2020

Exercice

1. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}$ converge.

On pose

$$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}.$$

2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
3. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.
4. (a) Montrer que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.
- (b) Montrer que pour tout $x > 0$,

$$f'(x) - f(x) = -\frac{1}{1+e^{-x}}.$$

5. Dédurre que pour tout $x \geq 0$,

$$f(x) = e^x \ln(1 + e^{-x}).$$

6. A l'aide du développement en série entière de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$, retrouver l'expression de f établie dans la question 5.

Problème

Soit $\alpha > \frac{-1}{2}$. On considère l'équation différentielle :

$$(E_\alpha) \quad xy''(x) + (2\alpha + 1)y'(x) + xy(x) = 0.$$

Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions polynômiales définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$P_0(x) = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* : P_n(x) = \prod_{k=1}^n (x+k).$$

Partie I

1. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ a un rayon de convergence $R > 0$. On pose $y :]-R, R[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Montrer que y est une solution de (E_α) si, et seulement si :

$$a_1 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, a_{n+1} = \frac{-1}{(n+1)(n+1+2\alpha)} a_{n-1}.$$

2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n! P_n(\alpha)} x^{2n}$.

On note f_α sa somme sur son intervalle de convergence.

3. Soit y une solution de (E_α) développable en série entière au voisinage de 0. Montrer que $y(x) = y(0)f_\alpha(x)$.

Partie II.

On définit la fonction h_α de la variable réelle x par :

$$h_\alpha(x) = \int_0^1 (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \cos(xt) dt.$$

1. Montrer que h_α est définie et de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$x h_\alpha''(x) + x h_\alpha(x) = \int_0^1 (1-t^2)^{\alpha+\frac{1}{2}} x \cos(xt) dt.$$

3. A l'aide d'une intégration par parties, en déduire que h_α est solution de (E_α) sur $\mathbb{R}$.
4. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Rappeler le développement en série entière de $t \mapsto \cos(xt)$.
(b) Montrer que h_α est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, et que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n I_n(\alpha) x^{2n}}{(2n)!}, \quad \text{où } I_n(\alpha) = \int_0^1 (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} t^{2n} dt.$$

5. Exprimer h_α en fonction de $h_\alpha(0)$ et f_α .
6. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n(\alpha) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n! P_n(\alpha)} I_0(\alpha)$$