



Devoir Surveillé d'informatique

1^{er} semestre AU : 2020 – 2021

Date : 1 Février 2021

;

Section : MP2, PC2, PT2

;

Nombre de page : 2

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

Le langage de programmation sera obligatoirement Python.

*

* *

Implémentation. Dans ce sujet, nous adopterons la syntaxe du langage Python. On rappelle qu'en Python, il importe de bien respecter les indentations car elles permettent de définir des blocs.

Points fixes de fonctions à domaine fini :

Dans ce problème, on s'intéresse aux points fixes des fonctions $f : E \rightarrow E$, où E est un ensemble fini. Le calcul effectif et efficace des points fixes de telles fonctions est un problème récurrent en informatique (transformation d'automates, vérification automatique de programmes, algorithmique des graphes, etc), et admet différentes approches selon la structure de E et les propriétés de f .

On pose par la suite, $E_n = \{ 0, \dots, n-1 \}$ où n est un entier > 0 et une fonction $f : E_n \rightarrow E_n$. On peut représenter la fonction f par une liste L tel que $L[x] = f(x)$ pour tout $x = 0, \dots, n-1$.

Partie I. Recherche de point fixe : cas général

On rappelle que x est un point fixe de la fonction f si et seulement si $f(x) = x$.

Question 1 : Ecrire une fonction `remplir_list(f,n)` qui prend en paramètres une fonction f et un entier n et renvoie une liste L tel que $L[x] = f(x)$ pour tout $x = 0, \dots, n-1$.

```
>>>f0 = lambda x : (2*x + 1) % 10
>>>L0 = remplir_list(f0 , 10)
>>>print(L0)
[1, 3, 5, 7, 9, 1, 3, 5, 7, 9]
```

Question 2 : Ecrire une fonction `nb_points_fixes(L)` qui prend en paramètres une liste L et qui renvoie le nombre de points fixes de la fonction $f : E_n \rightarrow E_n$ représenté par la liste L .

```
>>>nb_points_fixe(L0)
1
```

Question 3 :

On note f^k l'itérée k-ième de f , autrement dit :

$$f^k: E_n \rightarrow E_n$$

$$x \rightarrow f(f(\dots f(x))\dots)$$

Ecrire une fonction itere (f, k, x) qui prend en paramètres une fonction f et x, k deux entiers de E_n et renvoie $f^k(x)$.

Question 4 : Ecrire une fonction nb_points_fixes_iter(f, k, n) qui prend en paramètres une fonction f et x, k deux entiers de E_n et renvoie le nombre de points fixe de f^k .

Partie II. Recherche de point fixe : cas d'une fonction croissante

On rappelle qu'une fonction $f: E_n \rightarrow E_n$ est croissante si et seulement si pour tous $x, y \in E_n$ tels que $x \leq y$, $f(x) \leq f(y)$.

On admet qu'une fonction croissante de E_n dans E_n admet toujours un point fixe.

Question 5 : Ecrire une fonction est_croissante(f, n) qui prend en paramètres une fonction f et un entier n et renvoie True si la fonction f est croissante, False sinon.

Question 6 : Ecrire point_fixe_croissante(L) qui prend en paramètre une liste L et qui renvoie un point fixe de la fonction croissante $f: E_n \rightarrow E_n$ représentée par la liste L . On impose un temps de calcul logarithmique en la taille n de la liste.

```
>>>L = [1, 3, 3, 5, 5, 6, 7, 7, 7, 8]
>>>print('point fixe : ', point_fixe_croissante(L) )
point fixe : 7
```