Institut Préparatoire

Aux Etudes d'Ingénieurs

De Sfax

Année universitaire 2020 – 2021

PC2–PT2

Analyse

Devoir de Synthèse n.1 (Durée : 1 heure 45 min)

EXERCICE. On considère E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions définies et **continues** sur $]0,+\infty[$ à valeurs réelles et E_0 le sous espace vectoriel de E défini par :

$$E_0 = \{f \in E; \quad \text{la fonction } f^2 : t \to \left(f(t)\right)^2 \quad \text{est intégrable sur }]0,+\infty[\}$$

Pour $f \in E_0$, on pose

$$N(f) = \sqrt{\int_0^{+\infty} \left(f(t)\right)^2 dt}$$

1) Vérifier que si g et h sont deux fonctions de E_0, alors $g \cdot h$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
2) Montrer que N est une norme sur E_0.
3) On considère la partie B de E_0 définie par

$$B = \{f \in E_0; \quad \int_0^{+\infty} \left(f(t)\right)^2 dt \leq 2\}$$

Montrer que B est une partie fermée de (E_0, N).

PROBLEME. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$\forall n \geq 1, \quad \forall x > -1, \qquad f_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$$

Soit $I =]-1,+\infty[$ et posons $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

Partie 1.

1) Etudier la convergence simple puis uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ sur I.
2) Justifier que la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur I.
3) Prouver que la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur I.
4) Montrer que S est définie continue sur I.
5) Vérifier que pour tout $x > -1$,

$$S(x+1) - S(x) = \frac{1}{1+x}.$$

6) En déduire qu'au voisinage de $(-1)^+$,

$$S(x) \sim -\frac{1}{1+x}$$

Partie 2.

1) Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $S(n) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$.

2) Préciser le sens de variation de S.

3) En déduire que $\lim_{x \to +\infty} S(x) = +\infty$.

4) Soit $x > 0$.

a) Montrer que la fonction $F_x : t \to \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et calculer $\int_1^{+\infty} F_x(t)dt$.

b) En justifiant que F_x est décroissante sur $[1, +\infty[$, établir que :

$$\forall n \geq 1, \quad \int_n^{n+1} F_x(t)dt \leq f_n(x) \qquad et \qquad \forall n \geq 2, \quad f_n(x) \leq \int_{n-1}^{n} F_x(t)dt$$

5) En déduire qu'au voisinage de $+\infty$,

$$S(x) \sim \mathbf{Ln}\, x$$

6) On considère la suite $(A_n)_{n \geq 1}$ définie par $A_n = S(n) - \mathbf{Ln}\,(n)$.

a) Montrer que la suite $(A_n)_{n \geq 1}$ converge vers un réel γ appelée la constante d'Euler.

b) En utilisant le sens de variation de S, déduire que

$$\lim_{x \to +\infty} \Big(S(x) - \mathbf{Ln}\, x \Big) = \gamma.$$