Devoir de Synthèse

Partie C : Étude du magnétron (4 pts)

Données : $\overrightarrow{grad}\left(g(r)\right) = \frac{dg}{dr}\vec{u}_r \quad , \Delta\left(g(r)\right) = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dg}{dr}\right)$

Le magnétron (Figure 1) est assimilé à un tube à vide qui comporte deux électrodes métalliques cylindriques de même axe (Oz) : une cathode, de rayon a et de potentiel $V(r = a) = 0$ et une anode qui est un cylindre creux d'axe Oz, de rayon $b > a$ et de potentiel $V(r = b) = U$. On néglige les effets de bord.

On se repère en coordonnées cylindriques $M(r, \theta, z)$ par rapport à l'axe des électrodes.

L'étude du système est réalisée dans un repère $\mathcal{R}(O, x, y, z)$ supposé galiléen.

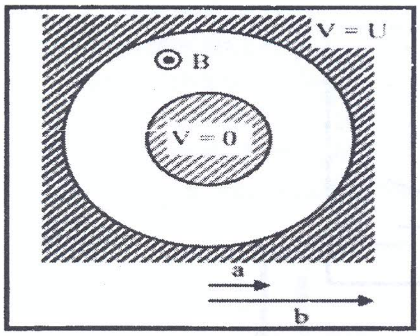


Figure 1

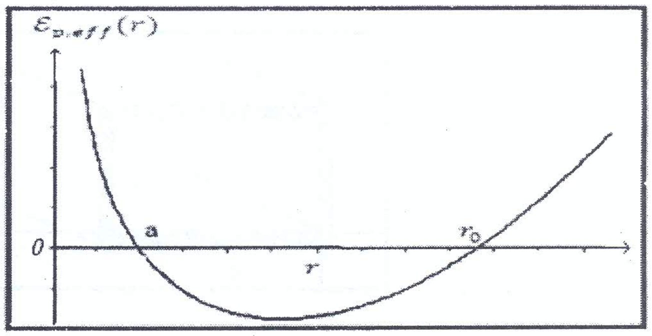


Figure 2

C-1) Montrer que le potentiel, entre les électrodes, s'écrit $V(M) = U\frac{Ln\left(\frac{r}{a}\right)}{Ln\left(\frac{b}{a}\right)}$.

C-2) En déduire le champ $\vec{E}(r)$.

Dans l'espace entre les électrodes, on applique un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{u}_z$. La cathode, chauffée par effet Joule, émet des électrons de charge $(-e)$ et de masse m avec une <u>vitesse négligeable</u> ; on suppose que le débit d'électron émis assez petit pour qu'on puisse considérer que les interactions entre les électrons sont négligeables et que chaque électron subit seulement la force de Lorentz $\vec{F}_{Lorentz}$.

C-3) Décrire qualitativement le mouvement des électrons.

C-4) En partant de l'expression de vecteur $\overrightarrow{OM}(t) = r(t)\,\vec{u}_r + z(t)\,\vec{u}_z$, déterminer l'expression de la vitesse $\vec{v}(t)$ et de l'accélération $\vec{a}(t)$.

C-5) Écrire la RFD et déduire que le mouvement a lieu dans un plan $z = cte$.

C-6) Montrer le moment cinétique $\vec{L}_O$ au point O, d'un électron se trouvant dans le plan $z = 0$, vérifie les deux relations suivantes :

$$\vec{L}_O = m.r^2.\dot{\theta}\vec{u}_z \qquad (I) \qquad et \qquad \vec{L}_O(t) = \frac{e(r^2-a^2)}{2}.\vec{B} \qquad (II)$$

C-7) En déduire que la composante ortho-radiale de la vitesse $v_\theta = \omega_L\left(r - \frac{a^2}{r}\right)$.

On exprimera ω_L en fonction de m, B et e.

C-8) Déterminer alors l'énergie mécanique $\mathcal{E}_{mec}$

On admet que $\mathcal{E}_{mec} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \mathcal{E}_{p,eff}(r)$ où $\mathcal{E}_{p,eff}(r) = -eV(r) + \frac{B^2e^2}{8m}\left(\frac{a^2}{r} - r\right)^2$

C-9) Justifier que $\mathcal{E}_{mec}$ est une constante de mouvement. Quelle est sa valeur ?

C-10) L'allure de la fonction $\mathcal{E}_{p,eff}(r)$ est représentée ci-dessus (Figure 2).

Quelle est la nature du mouvement et la forme de la trajectoire ?

C-11) À quelle condition sur B, l'électron ne heurte pas l'anode ?

Partie D : Étude du Guide d'ondes (8 pts)

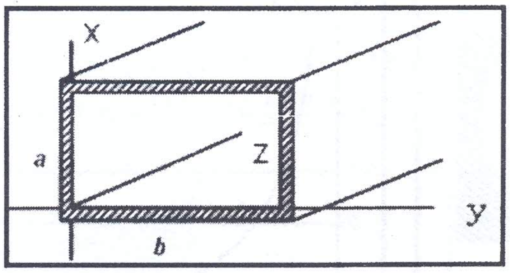
Données :

$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{A}) = \overrightarrow{grad}(div\vec{A}) - \vec{\Delta}\vec{A}$,

$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 3\ 10^8\ \mathrm{ms^{-1}}$, $\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7} Hm^{-1}$. $\varepsilon_0 = 8{,}8\ 10^{-12} Fm^{-1}$

Relations de continuité $\quad \vec{n}_{1\to 2}.(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, $\vec{n}_{1\to 2} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0\vec{j}_s$

Un guide d'ondes permet de guider les ondes produites par le magnétron vers la cavité du four. On considère un guide d'onde de section rectangulaire ab, où $a = 3{,}4\ cm < b$, dont les parois sont supposées parfaitement conductrices.



D-1) Écrire les équations de Maxwell dans le vide (sans charges ni courants).

D-2) Établir l'équation de propagation du champ $\vec{E}$.

D-3) Rappeler la définition et les propriétés d'un conducteur parfait.

D-4) Quelles sont les composantes continues du champ électromagnétique$(\vec{E}, \vec{B})$ à la traversée d'une interface séparant deux milieux ?

Le champ électrique de l'onde se propageant à l'intérieur du guide est donné par :

$$\vec{E}(y,z,t) = E_0 \sin(\beta y) \sin(\omega t - k_g z)\vec{u}_x \text{ avec } E_0, \beta, \omega \text{ et } k_g \in \mathbb{R}^*_+$$

D-5) Cette onde est-elle plane? progressive? harmonique? transverse électrique?

D-6) Exprimer β en fonction de b et d'un entier n.

D-7) En déduire la relation de dispersion $\quad k_g^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(n\frac{\pi}{b}\right)^2$.

D-8) À quelle condition sur ω a-t-on propagation ? Représenter k_g en fonction de ω.

D-9) Déduire une condition sur b si on veut propager une seule fréquence de $2{,}45\ GHz$.

<u>*Dans la suite, on fixe $n = 1$*</u>

D-10) Calculer la vitesse de phase $v_\varphi(\omega)$et la vitesse du groupe $v_g(\omega)$.

D-11) Tracer leurs allures sur un meme graphe.

D-12) Le guide est-il dispersif ? absorbant ? Justifier.

D-13) Déterminer l'expression du champ magnétique $\vec{B}$.

D-14) Commenter la structure de l'onde.

D-15) Sur quelle(s) face(s) du guide aura-t-il apparition des courants surfaciques ?

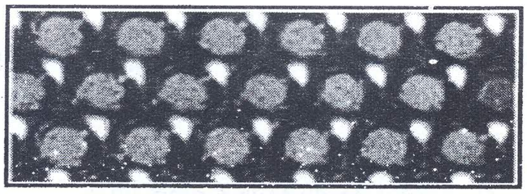
D-16) Calculer la moyenne temporelle du vecteur de Poynting $\langle\vec{R}\rangle$.

D-17) Déterminer sa moyenne spatiale $\langle\langle\vec{R}\rangle\rangle_y$ en fonction de ε_0, E_0 et v_g.

D-18) Déduire la puissance moyenne $\wp$ traversant le guide.

D-19) Calculer E_0 pour $\wp = 750W$ et $b = 6{,}8\ cm$.

D-20) La porte du four est constituée de deux plaques de verre entre lesquelles est insérée une grille métallique percée d'ouvertures régulièrement espacées de $\ell = 3\ mm$ environ.

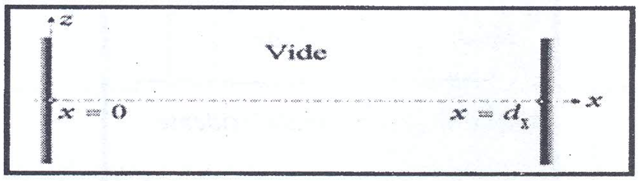


Justifier qualitativement le double intérets de cette grille.

Partie E : Étude de la cavité du four (8 pts)

Donnée : $2\ sin(\alpha).sin(\theta) = \left(cos(\alpha - \theta) - cos(\alpha + \theta)\right)$

L'onde guidée est ensuite dirigée vers l'agitateur (hélice en métal) et enfin répartie dans la cavité du four grâce à cette hélice.
On suppose ici que les faces du four sont identiques et modélisées par des plans métalliques infiniment conducteurs. L'intérieur du four est assimilable au vide.
Le problème étant identique dans les 3 directions $(d_x \times d_y \times d_z)$ de l'espace. Son étude est alors réduite à une seule dimension. On choisit de travailler le long de l'axe des x.



On cherche le champ électrique de l'onde sous la forme $\vec{E}(x,t) = E_0.g(x).\sin(\omega t)\vec{u}_z$

E-1) Quelle est la polarisation de cette onde ?

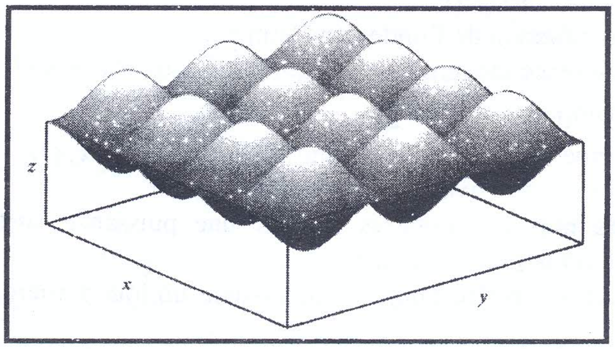
E-2) Montrer que $g(x) = \sin\left(\frac{m\pi}{d_x}x\right), m \in \mathrm{N}^*$.

E-3) Donner l'expression du champ électrique $\vec{E}_m(x,t)$ du mode propre m , le caractériser (3 qualitatifs) et montrer qu'on peut le décomposer en deux ondes planes progressives harmoniques : une incidente et l'autre réfléchie.

E-4) Représenter l'allure du fondamental et deux premiers harmoniques dans la cavité.

E-5) Le traitement tridimensionnel du problème exprime les modes de la cavité à l'aide d'un triplet(m, p, q) tel que $\frac{1}{\lambda^2} = \frac{m^2}{4\,d_x^2} + \frac{p^2}{4\,d_y^2} + \frac{q^2}{4\,d_z^2}$ où $(m,p,q) \in \mathrm{N}^{*3}$ et $\lambda = 12{,}3\ cm.$

L'amplitude de l'une des composantes du champ électrique correspondant est proposée sur la figure ci-dessous, pour le mode $(m, p, 2)$.



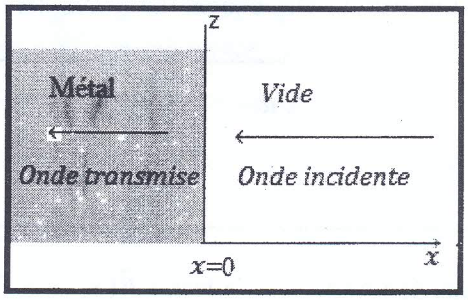
Déterminer m et p puis la dimension d_z de la cavité sachant que $d_x = d_y = 372\ mm.$

Avec un four de puissance $\wp = 750W$, on chauffe $500\ g$ d'eau liquide de capacité calorifique massique $c_m = 4{,}18\ kJ.kg^{-1}.K^{-1}$. En $1\ min\ 30\ s$, la température de l'eau varie de $18°C$ à $42\ °C$.

E-6) Calculer la variation d'énergie interne de l'eau liquide.
E-7) Calculer le rendement de conversion du four. Commenter.

En réalité, le métal n'est pas un conducteur parfait. Une partie de l'onde électromagnétique pénètre dans les parois métalliques du four et s'atténue avec la distance. Celles-ci doivent donc être suffisamment épaisses pour que l'onde ne puisse les traverser que faiblement. Les parois du four sont en céramique émaillée d'épaisseur $\xi = 2\ mm$, assimilable à de l'aluminium de conductivité électrique $\gamma = 3{,}8\ 10^7 S.m^{-1}$.

On s'intéresse à une onde électromagnétique dont le champ électrique s'écrit en notation complexe $\underline{\vec{E}}(x,t) = E_0 \exp\left(i(\omega t + \underline{k}_c x)\right)\vec{u}_z$, où $\underline{k}_c \in \mathbb{C}^* et\ E_0 \in \mathbb{R}^*_+$



La propagation de l'onde dans le métal se fait dans le cadre de l'approximation des régimes quasi- stationnaires ($ARQS$).

E-8) Définir ce régime temporel.
E-9) Simplifier alors l'équation Maxwell-Ampère.
E-10) Montrer que le métal est localement neutre (la densité de charge $\rho \to 0$).
E-11) Montrer que $\vec{E}$ vérifie l'équation $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = D\ \vec{\Delta}(\vec{E})$; Où D est une fonction de γ et μ_0.
E-12) Quelle est l'unité de D. Calculer sa valeur.
E-13) Montrer que la relation de dispersion de l'onde s'écrit $\underline{k}_c^2 = -i\mu_0\gamma\omega$
E-14) Déduire que $\vec{E}(x,t) = E_0 exp\left(\frac{x}{\delta}\right) cos\left(\omega t + \frac{x}{\delta}\right)\vec{u}_z$où δ est une fonction de μ_0, γ et ω.
E-15) Calculer δ pour $f = 2{,}45\ GHz$.
E-16) Commenter la propagation de l'onde dans le métal.
E-17) Déterminer la puissance moyenne volumique cédée aux charges $\langle P_{vol}\rangle$.
E-18) Déterminer le champ magnétique $\underline{\vec{B}}$.
E-19) Calculer la moyenne temporelle du vecteur de Poynting $\langle\vec{R}(x,t)\rangle$.
E-20) Montrer que l'identité de Poynting est vérifiée.
E-21) Sachant que les normes sanitaires exigent une puissance surfacique inférieure à $10Wm^{-2}$. Respecte-on ces normes ? Justifier.
E-22) Pourquoi il ne faut pas mettre d'objet en métal dans un four à micro-ondes ?

******** FIN DE L'EPREUVE ********