

Devoir de Contrôle de PHYSIQUE 2  
 PT 2  
 Durée : 2H  
 \*\*\*\*\*

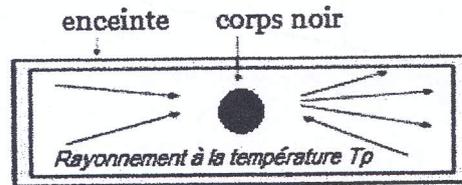
Exercice (5 pts)

Une sphère de surface  $S$ , de capacité calorifique  $C = 5JK^{-1}$  et se comportant comme un corps noir, est introduite, à l'instant  $t = 0$  s, dans une enceinte vide dont les parois sont maintenues à une température  $T_p$  constante. Initialement, la température de la sphère est  $T(t = 0) = T_i = T_p + \varepsilon_0$ .

- 1- Définir un corps noir.
- 2- Calculer la température  $T_i$  sachant que la longueur d'onde de maximum d'émission vaut  $10 \mu m$ .
- 3- Rappeler la loi de Stéfán en précisant la dimension des différents termes.

Dans la suite,  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{USI}$  désigne la constante de Stéfán.

Soit  $\varepsilon(t) = T(t) - T_p$  l'écart de température à l'instant  $t$  entre la sphère et l'enceinte considérée comme un corps noir aussi.



- 4- On suppose que l'écart  $\varepsilon(t) \ll T_p$ . Montrer que le flux radiatif  $\Phi_{rad}$  (puissance sortante comptée algébriquement) de la sphère s'écrit  $\Phi_{rad} = h_r S \varepsilon(t)$  où  $h_r$  est une constante que l'on exprimera en fonction de  $\sigma$  et  $T_p$ .
- 5- En déduire l'équation différentielle  $\frac{d\varepsilon(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} \varepsilon(t) = 0$  avec  $\tau = \frac{C}{16\pi\sigma R^2 T_p^3}$  et  $R$  désigne le rayon de la sphère.
- 6- Tracer l'allure de  $T(t)$  et calculer le temps de relaxation thermique  $\tau$  pour  $T_p = 7^\circ C$  et  $R = 1cm$ .
- 7- Au bout de combien de temps l'écart de température est-il divisé par 2 par rapport à sa valeur initiale?

Problème

On cherche à étudier le phénomène de diffusion (conduction) thermique dans une barre cylindrique en cuivre, de masse volumique  $\rho$ , de capacité calorifique massique  $c$  et de conductivité thermique  $\lambda$  supposées constantes. Dans cette barre, de longueur  $L = 0,5m$  et de diamètre  $d = 15mm$ , la température  $T$  ne dépend que de la position  $z$ . Elle est isolée latéralement par une matière plastique de conductivité thermique suffisamment faible par rapport à celle du cuivre.

A - Généralités (3 pts)

- 1- Rappeler la loi de Fourier donnant l'expression du vecteur densité de courant thermique  $\vec{J}_{th}$ . Identifier les différents termes en précisant leur unité ainsi que la signification d'un éventuel signe '-'.
- 2- En effectuant un bilan énergétique pour la portion de barre comprise entre  $z$  et  $z + dz$ , établir l'équation de diffusion thermique:

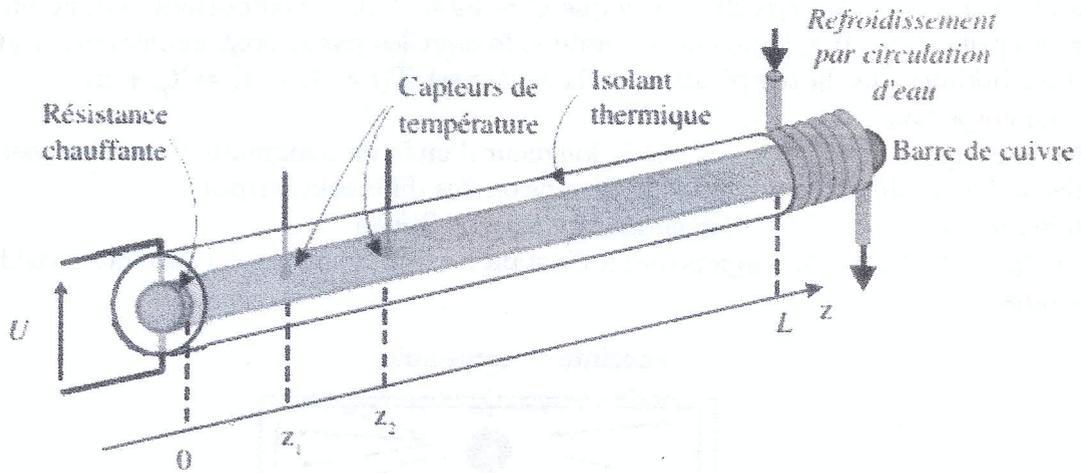
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{c\rho} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (E)$$

On pose dans la suite  $D = \frac{\lambda}{c\rho} = 1,19 \cdot 10^{-4} m^2 s^{-1}$

- 3- Donner deux propriétés de l'équation (E) et préciser leurs conséquences sur l'étude du phénomène diffusif.

**B - Étude du régime stationnaire (4,5 pts)**

Dans la pratique, on creuse une cavité à l'extrémité  $z = 0$  de la barre pour y placer une résistance chauffante  $R_{ch} = 8 \Omega$ . Cette résistance est alimentée par un générateur de tension continue  $U = 6V$ . Un dispositif de refroidissement par circulation d'eau est placé à l'autre extrémité de la barre de telle sorte que la température du cuivre y soit égale à  $T_e = 20^\circ C$ . La mesure de température se fait par l'intermédiaire de petits capteurs logés dans des puits creusés latéralement en divers points du cylindre conducteur. On se place en régime stationnaire.



4- En supposant que la puissance fournie par l'alimentation continue à la résistance chauffante est intégralement transférée à la barre, exprimer  $\vec{J}_{th}(z=0)$  en fonction de  $U$ ,  $d$  et  $R_{ch}$ .

5- Montrer que la solution stationnaire  $T_s(z) = -\frac{4U^2}{\lambda R_{ch} d^2 \pi} (z - L) + T_e$

6- Les deux capteurs placés en  $z_1 = 8 \text{ cm}$  et  $z_2 = 16 \text{ cm}$  indiquent  $T_s(z_1) = T_1 = 46,4^\circ C$  et  $T_s(z_2) = T_2 = 41,4^\circ C$ . Donner l'expression de la conductivité thermique du cuivre et calculer sa valeur numérique.

7- Calculer  $T_s(z=0)$  puis tracer  $T_s(z)$ .

8- Définir puis calculer la résistance thermique  $R_{th}$  de la barre.

9- Le refroidissement à l'extrémité de la barre est assuré par une circulation d'eau de débit massique  $\mathcal{D}_m$  en  $(\text{kg s}^{-1})$ . En négligeant les fuites thermiques latérales, exprimer grâce à un raisonnement simple la variation de température de l'eau lors de la traversée du système de refroidissement. On pourra introduire la capacité thermique massique de l'eau  $c_{eau}$ .

**C - Étude du régime sinusoïdal (3 pts)**

Dans cette partie, la tension délivrée par le générateur est sinusoïdale  $U(t) = U_m \cos(\Omega t)$ . Dans ce cas, en régime périodique établi, la répartition de température sera de la forme  $T(z, t) = T_s(z) + \theta(z, t)$  avec  $T_s(z)$  est la solution trouvée en régime stationnaire. De plus, on suppose que la barre de cuivre peut être considérée comme semi-infinie pour le signal sinusoïdal.

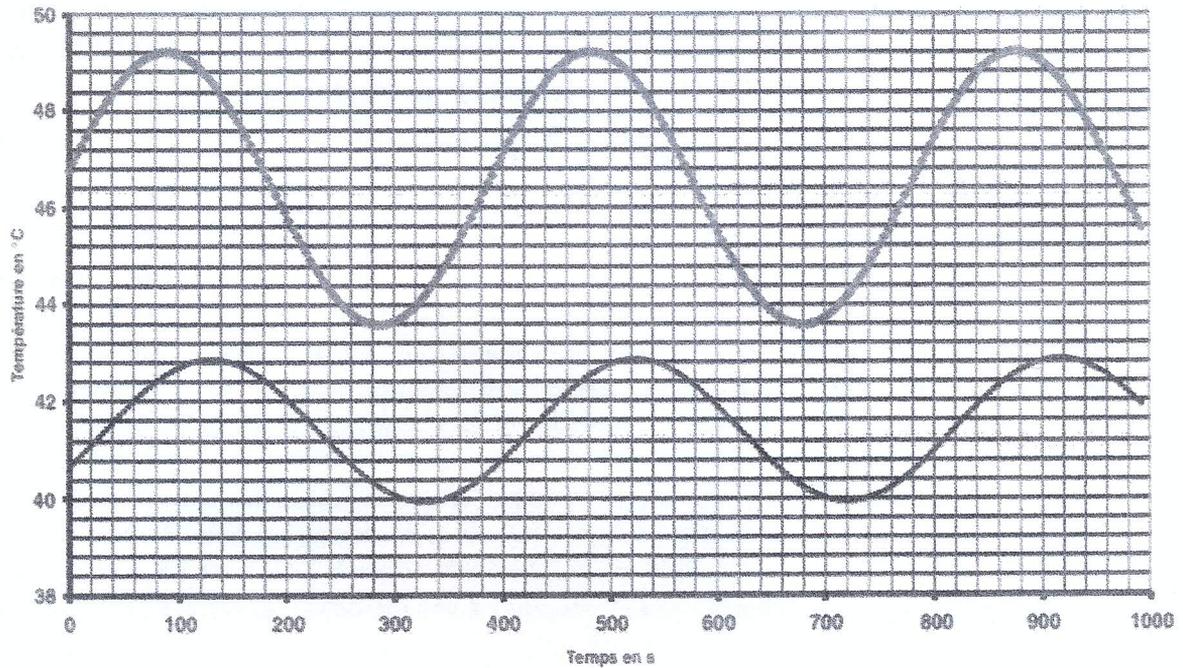
10- Mettre la puissance électrique dissipée dans la résistance chauffante sous la forme  $p(t) = P_0 + P_0 \cos(\omega t)$  en explicitant  $P_0$  en fonction de  $U_m$  et  $R_{ch}$  puis  $\omega$  en fonction de  $\Omega$ .

Afin de déterminer  $\theta(z, t)$ , on utilise la représentation complexe  $\theta(z, t) = A \exp i(\omega t - \underline{k}z)$

11- Justifier que  $\theta(z, t)$  vérifie l'équation (E), puis montrer que  $\underline{k} = \frac{1-i}{\delta}$  on exprimera  $\delta$  en fonction de  $D$  et  $\omega$ .

12- En déduire l'expression de  $\theta(z, t)$  (On ne cherche pas à déterminer  $A$ ).

13- La figure ci-dessous représente les graphes des fonctions  $T(z_1, t)$  et  $T(z_2, t)$ . Déterminer à partir des résultats expérimentaux la valeur numérique de  $\delta$  par deux méthodes. L'approximation du milieu semi-infini semble-elle valable ?



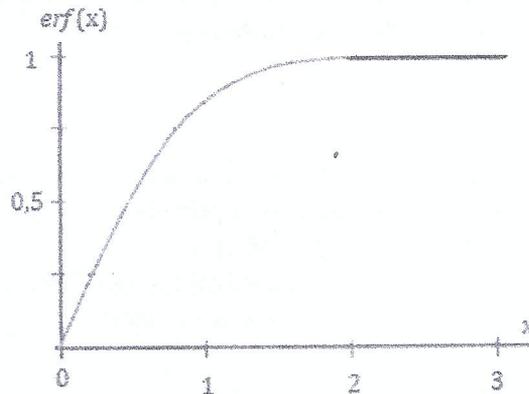
#### D - Étude du régime transitoire (4,5 pts)

On se propose, dans cette partie, d'étudier le régime transitoire précédant le régime permanent déjà étudié. La température de la barre était, initialement, uniforme  $T(z, t \leq 0) = T_e = 20^\circ\text{C}$ . On impose brusquement une température  $T_0 > T_e$  au niveau de l'extrémité  $z = 0$  :  $T(z = 0, t > 0) = T_0$ .

14- Donner une estimation de la durée  $\tau$  du régime transitoire précédant le régime établi. Quelles conséquences pratiques peut-on en déduire ?

On se propose alors d'étudier ce régime dans les tous premiers instants suivants l'application de la température  $T_0$ . Précisons tout d'abord que très loin de l'extrémité  $z = 0$ , les températures conservent leurs valeurs initiales. Afin de résoudre l'équation (E), on introduit la variable  $u = \frac{z}{\sqrt{4Dt}}$  et la fonction

erreur  $\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-s^2) ds$ .



15- Montrer que l'équation (E) peut se ramener à  $\frac{d^2T}{du^2} + 2u \frac{dT}{du} = 0$  (E')

16- Vérifier que  $T(u) = \alpha + \beta \text{erf}(u)$  est une solution possible de (E')

17- Identifier, grâce aux conditions aux limites, les constantes  $\alpha$  et  $\beta$  puis exprimer la répartition de température  $T(z, t)$ . On donne  $\int_0^\infty \exp(-s^2) ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

18- Donner l'allure de  $T(z, t)$  à des instants ultérieurs  $t_1 > 0$  et  $t_2 > t_1$ . Commenter.

\*\*\*Fin de l'épreuve\*\*\*