

**Devoir de contrôle de Mécanique des Solides Indéformables
MP2 & PC2 & T2**

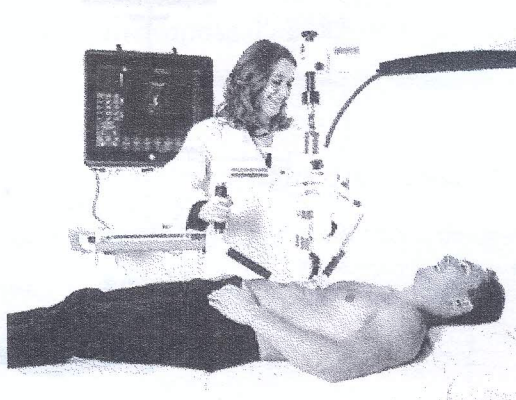
Durée : 1h

(Aucun document n'est autorisé)

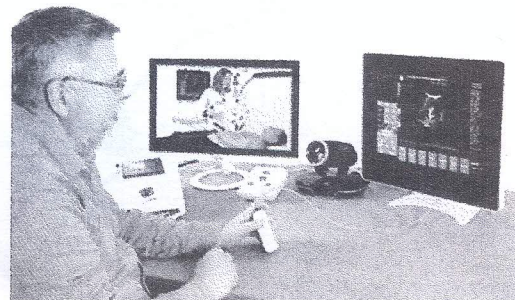
Date : 24 Février 2023

Système de télé-échographie

La télé-échographie permet à un médecin de pratiquer des échographies à distance (Figure 1).



(a) Site patient



(b) Site expert

FIGURE 1 – Principe de la télé-échographie

Sur le site patient (Figure 1a) équipé du robot porte-sonde, d'un échographe et d'un système de visioconférence, un professionnel de santé est chargé de positionner le robot porte-sonde sur le patient et de le maintenir au cours de l'examen. Depuis le site expert distant (Figure 1b), le médecin dirige l'examen échographique. En manipulant une sonde fictive, il donne une consigne de position pour la sonde, que le robot exécute au contact du patient. Réalisant le lien entre les deux sites, le réseau de communication disponible (4G, satellite,...) permet en temps réel, le contrôle du robot, la visioconférence ainsi que la transmission des images échographiques.

La Figure 2 décrit le robot porte-sonde constitué :

- d'une structure porteuse 0 ;
- d'un module de rotation, composé des sous-ensembles 1, 2, 3, permettant d'orienter la sonde en lui imposant trois rotations (R_1 , R_2 , R_3) suivant les axes 1 à 3 ;
- du porte-sonde 4 sur lequel est fixé la sonde échographique S. La translation T suivant l'axe 4 permet de contrôler l'effort de contact sonde/peau du patient.

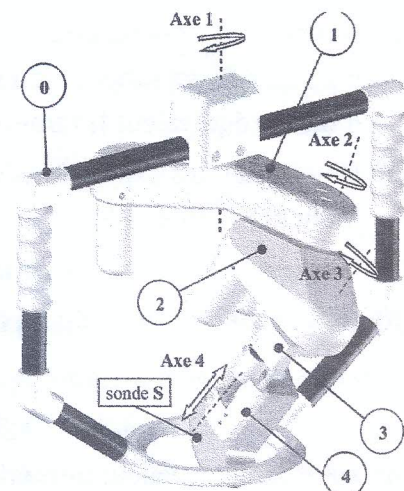


FIGURE 2 – Robot porte-sonde

Partie I - Validation des performances cinématiques du robot porte-sonde

Objectif : Vérifier que la sonde effectue trois rotations autour du point de contact sonde/peau.

Le schéma cinématique du robot porte-sonde est illustré par la Figure 3.

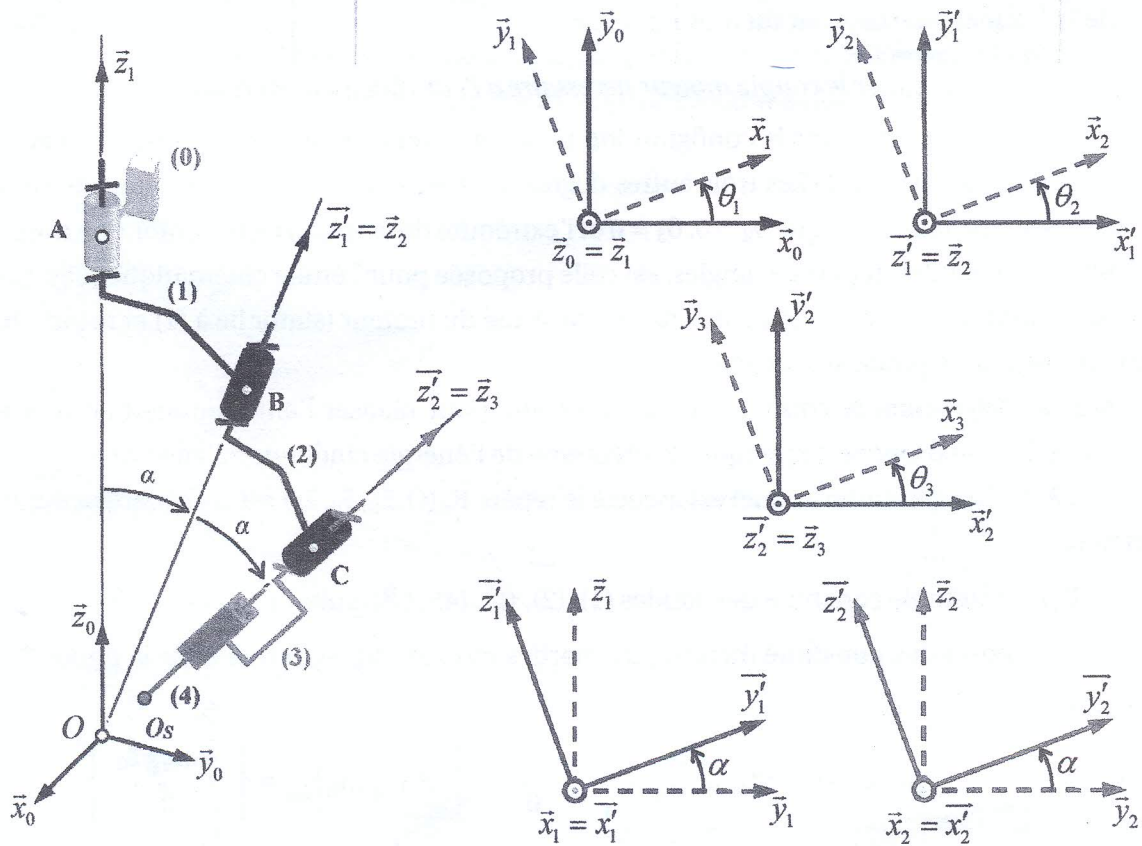


FIGURE 3 – Schéma cinématique du robot porte-sonde

On donne : $\vec{z}_2 = a_2 \vec{x}_0 + b_2 \vec{y}_0 + c_2 \vec{z}_0$; $\vec{z}_3 = a_3 \vec{x}_0 + b_3 \vec{y}_0 + c_3 \vec{z}_0$

où a_2, b_2, c_2 et a_3, b_3, c_3 dépendent des angles α, θ_1 et θ_2 .

Repères et paramétrage :

- Au solide (0) est associé le repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.
- Au solide (1) sont associés les repères $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ et $R'_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}'_1, \vec{z}'_1)$ tel que $\alpha = (\vec{z}_1, \vec{z}'_1) = -22,5^\circ$. Le solide (1) est en liaison pivot parfaite d'axe (O, \vec{z}_1) avec (0). La rotation de (1)/(0) est paramétrée par l'angle variable $\theta_1(t) = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$.
- Au solide (2) sont associés les repères $R_2(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ et $R'_2(O, \vec{x}_2, \vec{y}'_2, \vec{z}'_2)$ tel que $\alpha = (\vec{z}_2, \vec{z}'_2) = -22,5^\circ$. Le solide (2) est en liaison pivot parfaite d'axe (O, \vec{z}'_1) avec (1). La rotation de (2)/(1) est paramétrée par l'angle $\theta_2(t) = (\vec{x}'_1, \vec{x}_2) = (\vec{y}'_1, \vec{y}_2)$.
- Au solide (3) est associé le repère $R_3(O, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$. Le solide (3) est en liaison pivot parfaite d'axe (O, \vec{z}'_2) avec (2). La rotation de (3)/(2) est paramétrée par l'angle $\theta_3(t) = (\vec{x}'_2, \vec{x}_3) = (\vec{y}'_2, \vec{y}_3)$.
- Au solide (4) correspondant à l'ensemble {porte-sonde, sonde} est associé le repère $R_4(O_s, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$, le point O_s étant associé à l'extrémité de la sonde. Le solide (4) est en liaison glissière parfaite de direction \vec{z}_3 avec (3). On donne : $\overrightarrow{OO_s} = \lambda(t) \vec{z}_3$.

I.1) Déterminer les torseur cinématiques suivants : $\{\theta_{(1/0)}\}_O$; $\{\theta_{(2/1)}\}_O$; $\{\theta_{(3/2)}\}_O$ et $\{\theta_{(4/3)}\}_{O_s}$.

I.2) Déterminer par composition du mouvement le torseur cinématique de (4/0) au point O.

- I.3) La sonde est en contact avec le patient. Le point O_S est alors confondu avec le point O origine du repère lié au patient. Montrer qu'il est possible d'orienter le repère R_4 lié à la sonde par rapport au repère R_0 par trois rotations suivant les vecteurs de la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

Partie II - Dimensionnement du moteur d'axe 1

Objectif : déterminer le couple moteur nécessaire à l'entraînement en rotation autour de l'axe 1.

Le robot se trouvant dans la configuration bras tendu représenté sur la Figure 4, on étudie la rotation R_1 autour de l'axe 1 (A, \vec{z}_1). Les trois autres degrés de liberté (rotations R_2 et R_3 , translation T) du robot sont bloqués, de telle sorte que $\theta_2 = 0$, $\theta_3 = 0$ et l'extrémité de la sonde reste confondue avec l'origine O . La définition des solides, repères et angles, est celle proposée pour l'étude cinématique (Figure 3), complétée ici avec le groupe de motorisation de l'axe 1, constitué du moteur (stator lié à (1) et rotor), du réducteur et de la transmission poulies-courroie.

Afin de déterminer le couple moteur nécessaire pour réaliser l'entraînement en rotation autour de l'axe 1 (A, \vec{z}_1), on propose d'appliquer le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble en mouvement par rapport à (0). Le référentiel auquel est associé le repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est considéré comme Galiléen.

On note :

- (E_1) , l'ensemble constitué des solides (1), (2), (3), (4) et du stator moteur ;
- (E_5) , l'ensemble constitué du rotor, des parties mobiles du réducteur et de la poulie P_1 .

On donne :

- l'action de la pesanteur : $\{\tau_{\vec{g} \rightarrow E_1}\}_{G_1} = \left\{ \begin{matrix} -m_1 g \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}$ et $\{\tau_{\vec{g} \rightarrow E_5}\}_{G_5} = \left\{ \begin{matrix} -m_5 g \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}$;
- l'action associée au contact sonde/patient : $\{\tau_{0 \rightarrow 4}\}_O = \left\{ \begin{matrix} F_C \vec{z}_3 \\ C_R \vec{y}_3 + C_P \vec{z}_3 \end{matrix} \right\}$;
- l'action d'entraînement du rotor moteur par le stator, considérée ici comme *une action mécanique intérieure* : $\{\tau_{\text{stator} \rightarrow \text{rotor}}\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ C_m \vec{z}_1 \end{matrix} \right\}$.

Les liaisons sont supposées sans frottement et la transmission de puissance par le système poulies-courroie s'effectue sans glissement.

Paramétrage cinématique :

- $R_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est le repère associé à l'ensemble (E_1) . La rotation de $(E_1)/(0)$ est paramétrée par l'angle variable $\theta_1 = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$.
- $R_5(D, \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5)$ est le repère associé à l'arbre de sortie du réducteur. La rotation de $(R_5)/(R_1)$ est paramétrée par l'angle variable $\theta_5 = (\vec{x}_1, \vec{x}_5) = (\vec{y}_1, \vec{y}_5)$.
- $R_m(D, \vec{x}_m, \vec{y}_m, \vec{z}_5)$ est le repère associé au rotor moteur. La rotation de $(R_m)/(R_1)$ est paramétrée par l'angle variable $\theta_m = (\vec{x}_1, \vec{x}_m) = (\vec{y}_1, \vec{y}_m)$.

Données cinétiques :

- l'ensemble $E_1 \{1, 2, 3, 4, \text{stator}\}$ est de masse m_1 , de centre d'inertie G_1 , tel que $\overrightarrow{AG_1} = y_1 \vec{y}_1 - z_1 \vec{z}_1$, et de matrice d'inertie :

$$[I_{G_1}(E_1)] = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & -D_1 \\ 0 & -D_1 & C_1 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$$

- l'ensemble (E₅) est de masse m₅, de centre d'inertie G₅ situé sur l'axe (D, \vec{z}_5), avec $\overrightarrow{AG_5} = -y_5\vec{y}_1 - z_5\vec{z}_1$, et du moment d'inertie équivalent I₅ ramené au rotor moteur.

L'énergie cinétique de l'ensemble E₅ par rapport à R₀ est :

$$E_c(E_5/R_0) = \frac{1}{2}m_5 y_5^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}I_5 (\dot{\theta}_m + \dot{\theta}_1)^2$$

Une étude cinématique de la transmission réalisée par le réducteur et l'ensemble poulies-courroie, dont les caractéristiques sont précisées par la Figure 4, permettrait d'établir la relation suivante :

$$\dot{\theta}_1 = -r \frac{D_1}{D_0} \dot{\theta}_m$$

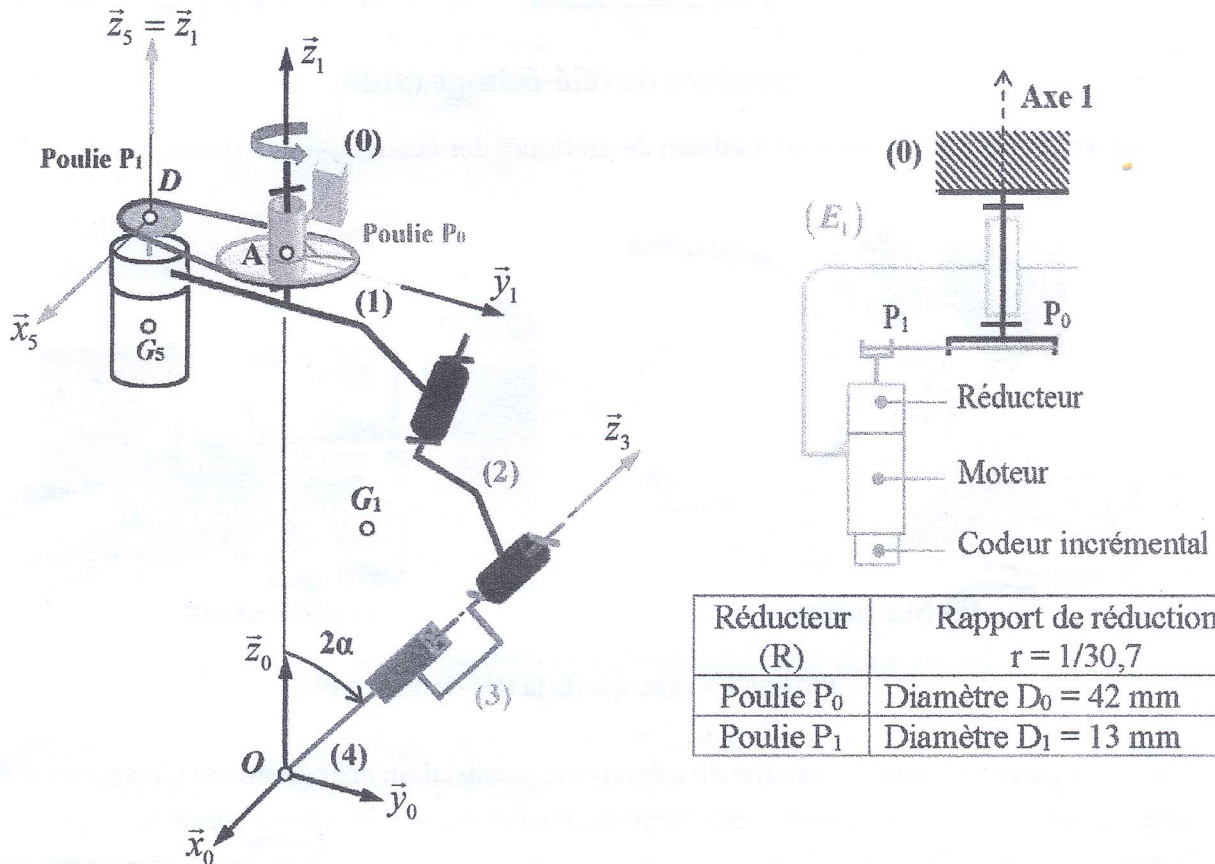


FIGURE 4 – Schéma cinématique du robot porte-sonde en configuration "bras tendu" ($\theta_2 = \theta_3 = 0$)

- II.1) Déterminer l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble E₁ dans son mouvement par rapport à R₀ en fonction du paramètre de mouvement $\dot{\theta}_1$.
- II.2) Donner l'expression de l'énergie cinétique totale du système $\Sigma = \{E_1, E_5\}$ dans son mouvement par rapport à R₀ en fonction du seul paramètre de mouvement $\dot{\theta}_1$. En déduire l'expression du moment d'inertie équivalent J₁ ramené à l'axe 1 (A, \vec{z}_1).
- II.3) Déterminer les expressions des différentes puissances extérieures au système Σ dans son mouvement par rapport à R₀ en fonction du seul paramètre $\dot{\theta}_1$; on rappelle que $\theta_2 = \theta_3 = 0$.
- II.4) Déterminer l'expression de la puissance intérieure en fonction du seul paramètre $\dot{\theta}_1$.
- II.5) Déterminer l'expression du couple moteur C_m en appliquant le théorème de l'énergie cinétique.

On donne les valeurs numériques suivantes pour une valeur de $\dot{\theta}_1$ donnée :

$$J_1 = 9,9 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}^2 \quad ; \quad C_R = -2 \cdot 10^{-2} \text{ N.m} \quad ; \quad C_p = -1 \cdot 10^{-1} \text{ N.m}$$

- II.6) Déterminer la valeur numérique du couple moteur maximal C_{Max} lorsque $\ddot{\theta}_1 = 7 \text{ rad.s}^{-2}$.